Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel

Philippe Courrège

Sur la forme intégro-différentielle des opérateurs de C_k^∞ dans C satisfaisant au principe du maximum

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 10, n° 1 (1965-1966), exp. n° 2, p. 1-38.

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1965-1966__10_1_A2_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du potentiel)
10e année, 1965/66, n° 2

14 avril 1966
[Rédaction de juillet 1966]

SUR LA FORME INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLE DES OPÉRATEURS DE C_k^∞ DANS C SATISFAISANT AU PRINCIPE DU MAXIMUM

par Philippe COURRÈGE

§ 0. Introduction.

Dans le mémoire [1], AISENSTAT énonce et établit le résultat suivant :

THÉORÈME 0.1. - Soient Ω un ouvert de R^n $(n \geqslant 1)$, et A une application linéaire de $C^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$ satisfaisant au principe du maximum positif local (si $f \in C^2(\Omega)$, $Af(x) \leqslant 0$ en tout point $x \in \Omega$ où f atteint un maximum relatif $\geqslant 0$). Alors, A est un opérateur différentiel du second ordre de la forme :

$$(0.1) \qquad Af = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} D_i D_j f + \sum_{i=1}^{n} b^i D_i f + cf \qquad (f \in C^2(\Omega)) ,$$

où les a^{ij} , b^i et c sont des fonctions numériques continues sur Ω , et où, pour chaque $x \in \Omega$, $c(x) \leqslant 0$ et la matrice $[a^{ij}(x)]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est symétrique et positive (mais éventuellement dégénérée ; voir le n° 1.8 ci-dessous).

Dans le présent travail, utilisant les idées récemment développées par WALDENFELS dans [10] et [11], on caractérise d'abord entièrement les applications linéaires de $C_k^\infty(\Omega)$ dans $C(\Omega)$ (Ω désignant un ouvert de R^n $(n \geqslant 1)$) satisfaisant au principe du maximum positif (non nécessairement local, voir le n° 1.2) comme somme d'un opérateur différentiel du second ordre du type précédent (mais à coefficients éventuellement discontinus ; voir le n° 1.6) et d'un opérateur intégral singulier d'ordre $\leqslant 2$ défini, en chaque $x \in \Omega$, comme une distribution $f \longrightarrow Sf(x)$ partie finie d'ordre 1 d'une mesure positive $N(x , dy)$ sur $\Omega \setminus \{x\}$ singulière en x (voir le n° 1.4).

Ce résultat est présenté au § 1 (en particulier aux n° 1.4 et 1.5), et établi au § 2. Il permet de rendre compte à la fois du théorème d'Aisenstat énoncé ci-dessus (voir sa démonstration au n° 1.7) et de ceux concernant les générateurs infinitésimaux des semi-groupes de Feller dont le domaine de définition (du générateur infinitésimal) contient "suffisamment" de fonctions de classe C^2 (voir à ce sujet l'exposé n° 3 du présent séminaire [8], ainsi que les travaux de FELLER [3] et de NEVEU [5] dans le cas d'une dimension, et l'article [2] dans le cas de convolution).

Au § 3, reprenant dans le cadre étudié ici, la méthode de représentation basée sur la transformation de Fourier utilisée dans l'étude des opérateurs pseudo-différentiels (voir HÖRMANDER [4]), on caractérise aussi les opérateurs A de $C_k^\infty(\Omega)$ dans $C(\Omega)$ satisfaisant au principe du maximum positif par certaines propriétés de leurs symboles $a(x, \xi)$: essentiellement le fait que $a(x, \xi)$ est, en ξ, l'opposé d'une fonction de type négatif continue (n° 3.4 et 3.5). Ainsi se trouve aussi généralisée l'expression du générateur infinitésimal d'un semi-groupe de convolution sur R^n comme opérateur de convolution par une distribution transformée de Fourier de l'opposée d'une fonction de type négatif continue (voir à ce sujet NEVEU [6]).

Seul le cas des ouverts de R^n est abordé ici ; l'extension au cas d'une variété sera examinée dans l'exposé n° 3 du présent séminaire [8], en même temps que l'application aux générateurs infinitésimaux des semi-groupes de Feller.

§ 1. Caractérisation des opérateurs presque positifs sur un ouvert de R^n.

1.0. - Dans tout cet exposé, Ω désigne un ouvert de R^n $(n \geq 1)$ ([1]). Pour chaque entier $p \geq 0$, fini ou infini, on note $C^p(\Omega)$ l'espace des fonctions numériques de classe C^p sur Ω, et $C_k^p(\Omega)$ (resp. $C_k^p(K)$, K compact de Ω) le sous-espace de $C^p(\Omega)$ formé des fonctions à support compact (resp. à support contenu dans K). On pose, comme d'ordinaire, $C(\Omega) = C^0(\Omega)$ et $C_k(\Omega) = C_k^0(\Omega)$.

On note, par ailleurs, $B(\Omega)$ l'espace des fonctions numériques sur Ω boréliennes et localement bornées.

Si $f \in B(\Omega)$, on note $\|f\| = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$ la norme uniforme de f. Si $f \in C^1(\Omega)$ on note $D_i f$ la fonction dérivée partielle $x \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$ $(1 \leq i \leq n)$; enfin, si $f \in C^2(\Omega)$, on pose

$$(1.1) \qquad \|f\|_{(2)} = \|f\| + \sum_{i=1}^n \|D_i f\| + \sum_{i,j=1}^n \|D_i D_j f\| .$$

On munit, une fois pour toute, l'espace $B(\Omega)$ (resp. $C(\Omega)$) de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, chacun des sous-espaces $C_k^2(K)$ (K compact de Ω) de la topologie d'espace de Banach associée à la norme $\| \|_{(2)}$, et l'espace $C_k^2(\Omega)$ de la topologie limite inductive des $C_k^2(K)$.

On dira enfin qu'un sous-espace D de $C_k^2(\Omega)$ est riche si, pour tout $f \in C_k^2(\Omega)$, il existe un ouvert relativement compact U tel que $\operatorname{supp} f \subset U \subset \overline{U} \subset \Omega$ et

---

([1]) Voir toutefois à ce sujet le n° 2.2 de l'exposé n° 3 de ce séminaire [8].

$(\forall\ \varepsilon > 0)\ (\exists\ g)\ (g \in D\ ,\ \ \mathrm{supp}\ g \subset U\ \ \text{et}\ \ \|f - g\|_{(2)} < \varepsilon)$. Un tel espace est évidemment dense dans $C_k^2(\Omega)$.

1.1. – On appellera <u>fonction unité locale sur</u> Ω , toute application

$$\sigma : (x , y) \longrightarrow \sigma(x , y)$$

de $\Omega \times \Omega$ dans $[0 , 1]$ ayant les propriétés suivantes :

(i) σ est de classe C^∞ sur $\Omega \times \Omega$, et $\sigma(x , y) = 1$ dans un voisinage de la diagonale de $\Omega \times \Omega$.

(ii) Pour chaque compact K de Ω , les fonctions $\sigma_x = \sigma(x , .)$ $(x \in K)$ gardent leurs supports dans un compact fixe de Ω .

Si σ est une telle fonction, on posera

$$\sigma^i(x , y) = \sigma_x^i(y) = \sigma(x , y)(y^i - x^i) \qquad (x , y \in \Omega\ ,\ \ 1 \leqslant i \leqslant n)\ .$$

Des propriétés (i) et (ii), il résulte que les applications $x \longrightarrow \sigma_x$ et $x \longrightarrow \sigma_x^i$ de Ω dans $C_k^2(\Omega)$ sont continues [2].

On peut établir comme suit l'existence d'une fonction unité locale : Soient $(U_i)_{i\in I}$ et $(V_i)_{i\in I}$ deux recouvrements ouverts localement finis de Ω par des ouverts relativement compacts tels que $\overline{U_i} \subset V_i \subset \overline{V_i} \subset \Omega$ pour chaque i . On considère le recouvrement de l'espace produit $\Omega \times \Omega$ formé des ouverts $V_i \times V_i$ $(i \in I)$ et de $W = (\Omega \times \Omega) \setminus \bigcup_i (\overline{U_i} \times \overline{U_i})$, et une partition de l'unité $\{(\varphi_i) , \varphi\}$ de classe C^∞ sur Ω subordonnée à ce recouvrement :

$$\varphi_i\ ,\ \varphi \geqslant 0\ ,\ \ \mathrm{supp}\ \varphi_i \subset V_i \times V_i\ \ (i \in I)\ ,\ \ \mathrm{supp}\ \varphi \subset W\ ,\ \text{et}\ \ \sum_i \varphi_i + \varphi = 1\ .$$

La fonction $\sigma = \sum_{i\in I} \varphi_i$ répond alors à la question.

On notera que l'on peut construire ainsi une fonction unité locale ayant son support dans un voisinage arbitrairement petit de la diagonale Δ de $\Omega \times \Omega$ (voir aussi le n° 2.3 de l'exposé n° 3).

1.2. - <u>Opérateurs presque positifs sur</u> Ω , <u>et principe du maximum</u>. Soient D un sous-espace vectoriel de $C_k(\Omega)$ [3], et A une application linéaire de D dans $B(\Omega)$ (n° 1.0).

On dira que A est <u>presque positive</u> [4] si :

---

(2) $C_k^2(\Omega)$ étant muni de la topologie limite inductive des $C_k^2(K)$ comme précisé au n° 1.0.

(3) Ci-dessous, D sera toujours contenu dans $C^2(\Omega)$, et le plus souvent $D = C_k^\infty(\Omega)$ ou $D = C_k^2(\Omega)$.

(4) Terminologie empruntée à WALDENFELS [11] ; voir la remarque 1 ci-dessous.

(P) pour tout $f \in D$ et $x \in \Omega$,

$$f \geqslant 0 \text{ et } f(x) = 0 \implies Af(x) \geqslant 0 .$$

On dira que A satisfait au principe du maximum positif si :

(PM) pour tout $f \in D$ et $x \in \Omega$,

$$f(x) \geqslant 0 \text{ et } f(x) = \sup f \implies Af(x) \leqslant 0 .$$

On dira enfin que A satisfait au principe du maximum positif local si :

(PML) pour tout $f \in D$, et $x \in \Omega$,

$$f \text{ admet en } x \text{ un maximum relatif } \geqslant 0 \implies Af(x) \leqslant 0 .$$

D étant fixé, il est clair que, (PML) $\implies$ (PM) $\implies$ (P) , et que l'ensemble des applications linéaires de D dans $B(\Omega)$, qui ont la propriété (P) (resp. (PM), (PML)), est un cône convexe.

On va décrire ci-dessous les deux types fondamentaux d'opérateurs presque positifs, le type local (n° 1.3) et le type intégro-différentiel (n° 1.4), à partir desquels on peut reconstruire un opérateur presque positif quelconque par addition (théorème 1.5).

Remarque 1. - Bien que le principe du maximum positif soit, de fait, la propriété intervenant dans les applications (par exemple aux générateurs infinitésimaux des semi-groupes d'opérateurs positifs), on a introduit, suivant WALDENFELS dans [11], la propriété un peu plus faible de "presque positivité" parce que, ainsi que le montre le théorème 1.5, c'est elle qui caractérise exactement les opérateurs qui admettent une décomposition de la forme annoncée ; le principe du maximum exigeant seulement quelques précisions supplémentaires sur les coefficients de la décomposition (voir le corollaire 3 du théorème 1.5, par exemple).

Remarque 2. - Le principe du maximum positif employé ici est, par rapport à celui de la théorie du potentiel (5), exactement ce que le recto est au verso : Si A , par exemple, applique $C_k^2(\Omega)$ sur un sous-espace dense de $C_0(\Omega)$, et si A possède la propriété suivante un peu plus forte que (PM) :

$$f \in C_k^2(\Omega) \text{ et } f(x) = \sup f > 0 \implies Af(x) < 0 ,$$

alors l'inverse de l'opérateur $-A$ se prolonge en un opérateur positif V de $C_0(\Omega)$ dans lui-même satisfaisant au principe du maximum positif de la théorie du potentiel.

---

(5) Voir, par exemple, [7], p. 6-06.

1.3. Opérateurs différentiels presque positifs. - On appellera ici opérateur différentiel semi-elliptique, un opérateur différentiel du second ordre défini sur $C^2(\Omega)$ par la relation :

$$(1.2) \qquad Pf = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} D_i D_j f + \sum_{i=1}^{n} b^i D_i f + cf \qquad (f \in C^2(\Omega)) \quad ,$$

où les a^{ij} , b^i et c sont des fonctions de $B(\Omega)$ (n° 1.0), et où, pour chaque $x \in \Omega$, la matrice $[a^{ij}(x)]_{1 \leq i,j \leq n}$ est symétrique et positive (mais éventuellement dégénérée) :

$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \geq 0$ pour tout $\xi = (\xi_i) \in R^n$ (voir le n° 1.8 à ce sujet),

et $a^{ij} = a^{ji}$ $(1 \leq i \;,\; j \leq n)$.

Il est élémentaire qu'un tel opérateur P est presque positif au sens du numéro précédent (voir aussi le n° 1.8).

De plus, pour que P satisfasse au principe du maximum positif, il faut et il suffit que la fonction $c = P1$ soit ≤ 0 ; et P satisfait alors au principe du maximum positif local. On dira dans ce cas que P est un opérateur de diffusion.

On notera aussi que P est continu de $C_k^2(\Omega)$ dans $B(\Omega)$.

On dira que P est de classe C^0 , si P applique $C^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$: il faut et il suffit pour cela que les coefficients a^{ij} , b^i et c soient continus.

On dira que P est de classe semi-continue, si le coefficient $c = P1$ est continu sur Ω , et si, pour chaque $\xi = (\xi_i) \in R^n$, la fonction

$$x \longrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j$$

est semi-continue supérieurement sur Ω .

L'intérêt de cette notion apparaîtra aux n° 1.5 et 1.6 ci-dessous. On notera son invariance par difféomorphisme :

LEMME. - Si Λ est un C^2-difféomorphisme de Ω sur un ouvert $\tilde{\Omega}$ de R^n et si P est un opérateur de diffusion sur Ω de classe semi-continue,

$$\tilde{f} \longrightarrow P(\tilde{f} \circ \Lambda) \circ \Lambda^{-1} \qquad (\tilde{f} \in C^2(\tilde{\Omega}))$$

est un opérateur de diffusion sur $\tilde{\Omega}$ de classe semi-continue.

[Compte tenu de la relation $\tilde{a}^{k\ell} = (\sum_{i,j} a^{ij} D_i \Lambda^k D_j \Lambda^\ell) \circ \Lambda^{-1}$ $(1 \leq k \;,\; \ell \leq n)$, il suffit de remarquer que la semi-continuité supérieure de la fonction positive

$$x \longrightarrow \sum_{i,j} a^{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \quad \text{pour} \quad \xi = (\xi_i) \in R^n$$

entraîne celle de la fonction

$$x \longrightarrow \sum_{i,j} a^{ij}(x)\, \xi_i(x)\, \xi_j(x)$$

pour toute famille $\xi_1(.)$, $\xi_2(.)$, ... , $\xi_n(.)$ de fonctions numériques continues sur Ω .]

1.4. Opérateurs presque positifs de Levy [6]. - On appellera noyau singulier de Levy (ou encore noyau singulier) sur Ω tout noyau $\geqslant 0$ borélien $N(x , dy)$ sur Ω tel que,

(NS_1) Pour tout $x \in \Omega$, $N(x , \{x\}) = 0$ et $N(x , .)$ est une mesure de Radon sur l'espace localement compact $\Omega \setminus \{x\}$.

(NS_2) Pour toute fonction positive $f \in C_k(\Omega)$, la fonction

$$x \longrightarrow \int_\Omega N(x , dy)\,|y - x|^2\, f(y)$$

est borélienne et localement bornée.

On dira que le noyau singulier N est de classe C^0 si

(NS_2') Pour tout $f \in C_k(\Omega)$, la fonction $x \longrightarrow \int_\Omega N(x , dy)\,|y - x|^2\, f(y)$ est continue sur Ω .

On dira que le noyau singulier N est de classe semi-continue si,

(NS_2'') Il existe une fonction $\nu \in B(\Omega)$, positive et semi-continue supérieurement, telle que, pour tout $f \in C_k(\Omega)$, la fonction

$$x \longrightarrow \int_\Omega N(x , dy)\,|y - x|^2\, f(y) + \nu(x)\, f(x)$$

est continue sur Ω [7].

On dira enfin que N est borné à l'infini si, pour chaque $x \in \Omega$,

(1.3) $\qquad N(x , \Omega \setminus V) < + \infty$ pour tout voisinage V de x ;

ou encore

(1.4) $\qquad \int_\Omega N(x , dy)(1 - \sigma_x(y)) < + \infty$ pour chaque fonction unité locale σ .

([6]) Voir à ce sujet le n° 2.2 de l'exposé n° 3 de ce séminaire [8].

([7]) On donnera, au n° 1.6, un exemple de noyau singulier de type semi-continu et non continu.

Ceci étant, voici le deuxième exemple d'opérateur presque positif sur $C_k^2(\Omega)$:

THÉORÈME 1.4. - Soient N un noyau singulier sur Ω, γ, γ^i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ des fonctions de $B(\Omega)$, et σ une fonction unité locale sur Ω (n° 1.1).

Pour chaque $f \in C_k^2(\Omega)$ et chaque $x \in \Omega$, on pose :

$$(1.5) \quad \begin{cases} Sf(x) = \gamma(x)\, f(x) + \sum_{i=1}^{n} \gamma^i(x)\, D_i\, f(x) \\ \qquad + \int_\Omega N(x\,,\, dy)[f(y) - \sigma_x(y)(f(x) + \sum_{i=1}^{n} D_i\, f(x)(y^i - x^i))] \,. \end{cases}$$

Alors :

(1) Pour chaque $f \in C_k^2(\Omega)$, $Sf \in B(\Omega)$ et $f \longrightarrow Sf$ est un <u>opérateur presque positif</u> défini sur $C_k^2(\Omega)$ (n° 1.2), et <u>continu</u> [8] de $C_k^2(\Omega)$ dans $B(\Omega)$.

(2) Pour que S applique $C_k^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$, il faut et il suffit que les coefficients γ et γ^i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ soient continus et que le noyau singulier N soit de classe C^0.

(3) Pour que S satisfasse au <u>principe du maximum positif</u> (n° 1.2), il faut et il suffit que N soit borné à l'infini et que

$$(1.6) \qquad \gamma(x) + \int_\Omega N(x\,,\, dy)(1 - \sigma_x(y)) \leqslant 0 \qquad \text{pour tout } x \in \Omega \,.$$

(4) Pour que S satisfasse au <u>principe du maximum positif local</u>, il faut et il suffit que N soit nul et $\gamma \leqslant 0$.

Enfin, S détermine entièrement le noyau singulier N :

$$(1.7) \qquad Sf(x) = \int_\Omega N(x\,,\, dy)\, f(y) \qquad \text{pour tout } f \in C_k^2(\Omega)$$

telle que $x \notin \operatorname{supp} f$.

Un opérateur S de la forme (1.5) sera appelé <u>opérateur</u> (<u>presque positif</u>) <u>de Levy</u> sur Ω ; et N sera appelé le <u>noyau singulier de</u> S.

On dira que S est de <u>classe</u> C^0 s'il applique $C_k^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$ et de <u>classe semi-continue</u> si le coefficient γ est continu et si N est de classe semi-continue. Ces notions sont invariantes par difféomorphisme :

LEMME. - Soient Λ un C^2-difféomorphisme de Ω sur un ouvert $\tilde{\Omega}$ de R^n, N un noyau singulier sur Ω et S un opérateur presque positif de Levy sur Ω admettant N comme noyau singulier.

---

[8] Pour les topologies sur $C_k^2(\Omega)$ et $B(\Omega)$ précisées au n° 1.0.

(1) Le noyau $\tilde{N}$ transporté de N par Λ $(\tilde{N}(\tilde{x}, \tilde{w}) = N(\Lambda^{-1}(\tilde{x}), \Lambda^{-1}(\tilde{w}))$, $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}$, $\tilde{w} \in \mathcal{B}_{\tilde{\Omega}})$ **est un noyau singulier de Levy sur $\tilde{\Omega}$. Si N est de classe** C^0 (resp. de classe semi-continue), il en est de même de $\tilde{N}$.

(2) L'opérateur S transporté de S par Λ $[\tilde{S}\tilde{f} = S(\tilde{f} \circ \Lambda) \circ \Lambda^{-1}$, $\tilde{f} \in C_k^2(\tilde{\Omega})]$ est un opérateur presque positif de Levy sur Ω de noyau singulier $\tilde{N}$. Si S est de classe C^0 (resp. de classe semi-continue), il en est de même de $\tilde{S}$.

Remarques. – On établira le théorème au n° 2.8, et le lemme aux numéros 2.7 et 2.12 ci-dessous. On note ici seulement que :

(α) Dans la relation (1.5), l'intégrale a un sens d'après (NS_2) et la propriété (i) de σ (n° 1.1), car la fonction

$$y \longrightarrow f(y) - \sigma_x(y)[f(x) + \sum_{i=1}^{n} D_i\, f(x)(y^i - x^i)]$$

est à support compact dans Ω grâce à la présence de σ, et majorée par $Cte \times |y - x|^2$ au voisinage de x (formule de Taylor) puisque f est de classe C^2.

(β) Dans le lemme, pour mettre l'opérateur $\tilde{S}$ sous la forme (1.5), on peut procéder comme suit : on note $\Phi = \Lambda^{-1}$, $\tilde{D}_k = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k}$, et, étant donnés $\tilde{f} \in C_k^2(\tilde{\Omega})$ et $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}$, on pose $f = \tilde{f} \circ \Lambda$ et $x = \Phi(\tilde{x})$; on a alors $\tilde{S}\tilde{f}(\tilde{x}) = Sf(x)$,

$$D_i\, f(x) = \sum_k \tilde{D}_k\, \tilde{f}(\tilde{x})\, D_i\, \Lambda^k(x)$$

et (formule de Taylor appliquée à Φ^i),

$$y^i - x^i = \Phi^i(\Lambda(y)) - \Phi^i(\Lambda(x)) = \sum_h \tilde{D}_h\, \Phi^i(\tilde{x})(\Lambda^h(y) - \Lambda^h(x)) + \sum_{h,\ell} (\Lambda^h(y) - \Lambda^h(x))(\Lambda^\ell(y) - \Lambda^\ell(x))\, \psi^i_{h,\ell}(x, y),$$

où $\psi^i_{h,\ell}$ est une fonction continue sur $\Omega \times \Omega$. D'où, compte tenu de ce que $\sum_i \tilde{D}_h\, \Phi^i(\tilde{x})\, D_i\, \Lambda^k(x) = \delta^k_h$ $(\Phi = \Lambda^{-1})$,

$$\sum_i D_i\, f(x)(y^i - x^i) = \sum_k \tilde{D}_k\, \tilde{f}(\tilde{x})(\Lambda^k(y) - \tilde{x}^k) + \sum_k \tilde{D}_k\, \tilde{f}(\tilde{x}) \sum_{h,\ell} (\Lambda^h(y) - \Lambda^h(x))(\Lambda^\ell(y) - \Lambda^\ell(x)) \sum_i D_i\, \Lambda^k(x)\, \psi^i_{h,\ell}(x, y) \;;$$

et, en substituant dans (1.5),

$$\tilde{S}\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{\gamma}(\tilde{x})\, \tilde{f}(\tilde{x}) + \sum_k \tilde{\gamma}^k(\tilde{x})\, \tilde{D}_k\, \tilde{f}(\tilde{x}) + \int_\Omega \tilde{N}(\tilde{x}, d\tilde{y})[\tilde{f}(\tilde{y}) - \tilde{\sigma}_{\tilde{x}}(\tilde{y})(\tilde{f}(\tilde{x}) + \sum_k \tilde{D}_k\, \tilde{f}(\tilde{x})(\tilde{y}^k - \tilde{x}^k))],$$

où l'on a posé $\tilde{\gamma}(\tilde{x}) = \gamma(\Phi(\tilde{x}))$,

$$\tilde{\gamma}^k(\tilde{x}) = \sum_i \gamma^i(\Phi(\tilde{x}))\ D_i\ \Lambda^k(\Phi(\tilde{x}))$$

$$- \sum_{h,\ell} \int_\Omega N(x\ ,\ dy)\ \sigma_x(y)(\Lambda^h(y) - \tilde{x}^h)(\Lambda^\ell(y) - \tilde{x}^\ell) \sum_i D_i\ \Lambda^k(x)\ \psi^i_{h,\ell}(x\ ,\ y)$$

et $\tilde{\sigma}(\tilde{x}\ ,\ \tilde{y}) = \sigma(\Phi(\tilde{x})\ ,\ \Phi(\tilde{y}))$.

(γ) Une modification de σ en entraîne une des coefficients γ , γ^i , mais laisse invariante la forme (1.5) de S .

1.5. – On peut alors énoncer la caractérisation des opérateurs presque positifs :

THÉORÈME 1.5. – Soient D un sous-espace vectoriel <u>riche</u> de $C^2_k(\Omega)$ (n° 1.0), et A une application linéaire de D dans $B(\Omega)$.

Pour que A soit presque positive (n° 1.2), il faut et il suffit qu'il soit de la forme $Af = Pf + Sf$ $(f \in D)$, où P est un opérateur différentiel <u>de diffusion</u> sur Ω (n° 1.3) tel que $P1 = 0$ (9), et S un opérateur presque positif <u>de Levy</u> (n° 1.4) ; la partie principale d'ordre 2 de P et le noyau singulier de S étant déterminés de façon unique par A .

De plus, pour que A applique $C^2_k(\Omega)$ dans $C(\Omega)$, il est nécessaire que P et S soient de classe semi-continue, et suffisant que P et S soient de classe C^0 (n° 1.3 et 1.4) (10).

Enfin, pour que l'opérateur A satisfasse au principe du maximum positif, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de S (11).

(Voir la démonstration au n° 2.10.)

COROLLAIRE 1. – Toute application linéaire presque positive d'un sous-espace <u>riche</u> (n° 1.0) de $C^2_k(\Omega)$ dans $B(\Omega)$ (resp. $C(\Omega)$) se prolonge de façon unique en une application linéaire continue de $C^2_k(\Omega)$ dans $B(\Omega)$ (resp. $C(\Omega)$) (12).

Cet énoncé est une conséquence immédiate du théorème précédent, compte tenu de la continuité de P et S (n° 1.3 et 1.4). On l'établit directement aux numéros 2.2 à 2.5.

---

(9) 1 désigne ici la fonction constamment égale à l'unité. Voir la remarque 1 ci-dessous à la fin de ce numéro.

(10) Voir le n° 1.6.

(11) Voir la remarque 1 à la fin de ce numéro.

(12) $C^2_k(\Omega)$, $C(\Omega)$ et $B(\Omega)$ étant munis des topologies précisées au n° 1.0.

COROLLAIRE 2. - Toute application linéaire de $C_k^\infty(\Omega)$ dans $B(\Omega)$ **satisfaisant au principe du maximum positif local (n° 1.2) est un opérateur différentiel de** diffusion (n° 1.3).

(Au n° 1.7, on déduira le théorème d'Aisenstat de ce résultat.)

COROLLAIRE 3 (Forme explicite d'un opérateur presque positif). - Soit A un opérateur presque positif de $C_k^2(\Omega)$ dans $B(\Omega)$. A est de la forme (pour $f \in C_k^2(\Omega)$ et $x \in \Omega$) :

$$(1.8)\quad \begin{cases} Af(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\, D_i D_j f(x) + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\, D_i f(x) + \gamma(x)\, f(x) \\ \qquad + \int_\Omega N(x\,,\, dy)[f(y) - \sigma_x(y)(f(x) + \sum_{i=1}^{n} D_i f(x)(y^i - x^i))] \end{cases},$$

où a^{ij}, b^i $(1 \leqslant i\,,\; j \leqslant n)$ et γ sont des fonctions de $B(\Omega)$ (la matrice $[a^{ij}(x)]$ étant symétrique et positive pour chaque $x \in \Omega$), et où N est un noyau singulier (n° 1.4), et σ une fonction unité locale (n° 1.1) sur Ω. De plus, A détermine entièrement le noyau singulier N par la relation :

$$(1.9)\quad \int_\Omega N(x\,,\, dy)\, f(y) = Af(x) \qquad \text{pour tout } f \in C_k^2(\Omega) \text{ et tout } x \in \Omega$$

tels que $x \notin \operatorname{supp} f$; et, une fois σ fixée, les coefficients a^{ij}, b^i et γ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ par les relations :

$$(1.10)\qquad a^{ij}(x) = \frac{1}{2}\,[A(\sigma_x^i\, \sigma_x^j)(x) - \int_\Omega N(x\,,\, dy)\, \sigma_x^i(y)\, \sigma_x^j(y)]\ \text{(13)}$$

$(1 \leqslant i\,,\; j \leqslant n\,,\; x \in \Omega)$,

$$(1.11)\qquad b^i(x) = A(\sigma_x^i)(x) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n\,,\; x \in \Omega)\,,$$

$$(1.12)\qquad \gamma(x) = A(\sigma_x)(x) \qquad (x \in \Omega)\,.$$

En outre, pour que A donné par (1.8) satisfasse au principe du maximum, il faut et il suffit que le noyau singulier N soit borné à l'infini et que

$$(1.13)\qquad \gamma(x) + \int_\Omega N(x\,,\, dy)(1 - \sigma_x(y)) \leqslant 0 \qquad \text{pour tout } x \in \Omega\,.$$

Le noyau singulier N sur Ω, associé à l'opérateur presque positif A par la relation (1.9), sera appelé le noyau singulier de A.

On peut caractériser comme suit les noyaux singuliers de classe semi-continue (n° 1.4) :

---

(13) On rappelle que l'on a posé $\sigma_x^i(y) = \sigma_x(y)(y^i - x^i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ (n° 1.1). Les a^{ij} sont, en réalité, indépendants du choix de σ.

COROLLAIRE 4. - Soit N un noyau singulier sur Ω. Pour que N soit de **classe semi-continue, il faut et il suffit qu'il existe un opérateur presque positif A** sur Ω, appliquant $C_k^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$ et dont N **soit le noyau singulier.**

Remarque 1. - Dans l'énoncé du théorème ci-dessus, on normalise P par la condition $P1 = 0$ afin de situer dans S le terme $\gamma(x)\, f(x)$ de la relation (1.8), ce qui permet d'obtenir le principe du maximum positif pour S en même temps que pour A.

Remarque 2. - On pourrait déduire du théorème 1.5 et de ses corollaires, une caractérisation des formes linéaires T sur $C_k^\infty(\Omega)$ satisfaisant au principe du maximum positif en un point $x \in \Omega$:

$$f \in C_k^\infty(\Omega) \quad \text{et} \quad f(x) = \sup f \geqslant 0 \implies \langle T\, ,\, f\rangle \leqslant 0 \quad ,$$

comme distributions d'ordre 2 parties finies en x d'une mesure $\geqslant 0$ sur $\Omega \setminus \{x\}$ (voir à ce sujet, la remarque du n° 2.2 ci-dessous, ainsi que le lemme du n° 5.7 de l'exposé n° 3).

1.6. - Un contre-exemple. - Avec les notations du théorème 1.5, lorsque A applique $C_k^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$, on souhaiterait que P et S soient tous deux de classe C^0, et pas seulement de classe semi-continue. Il n'en est pas ainsi, comme le montre le contre-exemple suivant dû à J. NEVEU : On prend $n = 1$, $\Omega = R$, on désigne par Φ une fonction de $C(R)$, et on pose, pour $f \in C_k^2(R)$, $x \in R$:

$$Af(x) = \frac{1}{[\Phi(x)]^2}\,[f(x + \Phi(x)) + f(x - \Phi(x)) - 2f(x)] \quad \text{si} \quad \Phi(x) \neq 0 \quad ,$$

$$Af(x) = D^2\, f(x) \quad \text{si} \quad \Phi(x) = 0 \qquad (D = \frac{d}{dx}) \quad .$$

A satisfait au principe du maximum positif, applique $C_k^2(R)$ dans $C(R)$, et son noyau singulier N est donné par :

$$N(x\, ,\, .) = 1_{[\Phi\neq 0]}(x)\, \frac{1}{[\Phi(x)]^2}\, (\varepsilon_{x+\Phi(x)} + \varepsilon_{x-\Phi(x)}) \quad ;$$

d'où on déduit que,

$$Af(x) = 1_{[\Phi=0]}(x)\, D^2\, f(x) + \int_R N(x\, ,\, dy)[f(y) - f(x)] \quad ;$$

autrement dit,

$$A = P + S \quad ,$$

où

$$Pf(x) = 1_{[\Phi=0]}(x)\, D^2\, f(x) \quad \text{et} \quad Sf(x) = \int_R N(x\, ,\, dy)(f(y) - f(x)) \quad .$$

P et S sont de type semi-continu, mais pas de type continu (n° 1.3 et 1.4).

Ainsi, dans la décomposition $A = P + S$ **d'un opérateur presque positif** A **en la** somme d'un opérateur de diffusion P et d'un opérateur de Levy S, la propriété, pour A, d'appliquer $C_k^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$ ne se transmet pas à P et S : chacun de ces deux termes pouvant comporter des irrégularités qui se compensent par addition.

L'examen des relations (1.10), (1.11) et (1.12) (n° 1.5), qui donnent les coefficients de P, est à ce sujet instructive : Supposant donc que A applique $C_k^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$, on voit d'abord que les coefficients γ et b^i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ (sur lesquels il y a une certaine indétermination à cause de leur transfert possible de P à S) peuvent être choisis continus (mais ceci, en ce qui concerne les coefficients γ^i, sans que l'on puisse les répartir entre P et S de sorte que cette continuité soit préservée par difféomorphisme). Posant ensuite,

$$\tilde{a}^{ij}(x) = \frac{1}{2} A(\sigma_x^i \; \sigma_x^j)(x) \quad ,$$

$$a_1^{ij}(x) = \frac{1}{2} \int_\Omega N(x \, , dy) \; \sigma_x^i(y) \; \sigma_x^j(y) \qquad (1 \leqslant i \, , j \leqslant n \, , \quad x \in \Omega) \quad ,$$

$$\tilde{a}(x \, , \xi) = \sum_{i,j} \tilde{a}^{ij}(x) \, \xi_i \, \xi_j \quad \text{et} \quad a_1(x \, , \xi) = \sum_{i,j} a_1^{ij}(x) \, \xi_i \, \xi_j \qquad (\xi \in R^n) \quad ,$$

pour chaque x, les formes quadratiques $\tilde{a}(x \, , .)$ et $a_1(x \, , .)$ sont positives, pour chaque ξ, la fonction $\tilde{a}(. \, , \xi)$ est continue, et la fonction $a_1(. \, , \xi)$ semi-continue inférieurement (n° 2.10, alinéas (β) et (ε)) ; et la relation (1.10) signifie que la forme quadratique $a(x \, , \xi) = \sum_{i,j} a^{ij}(x) \, \xi_i \, \xi_j$, définissant la partie principale de P, est la différence $\tilde{a}(x \, , \xi) - a_1(x \, , \xi)$.

Autrement dit, on voit que, l'opérateur de Levy S de <u>classe semi-continue</u> étant donné, les opérateurs de diffusion P qui, ajoutés à S, sont susceptibles de compenser l'irrégularité de S pour donner un opérateur presque positif $A = P + S$ appliquant $C_k^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$, sont exactement ([14]) ceux dont la partie principale $a(x \, , \xi)$ est de la forme $\tilde{a}(x \, , \xi) - a_1(x \, , \xi)$, où $\tilde{a}(x \, , .)$ est une forme quadratique positive pour tout x, et $\tilde{a}(. \, , \xi)$ une fonction continue pour tout ξ (avec évidemment $\tilde{a}(x \, , \xi) \geqslant a_1(x \, , \xi)$ pour tout x, ξ). En particulier, lorsque N est de classe C^0, $a_1(. \, , \xi)$ est une fonction continue pour tout ξ (voir le lemme 2.7), et on peut prendre $P \equiv 0$. Lorsque S n'est pas de classe C^0, il serait intéressant de connaître (lorsqu'il y en a) les éléments minimaux de l'ensemble des $\tilde{a}$ (avec la propriété de continuité en x) majorant a_1 (semi-continu

([14]) Cette condition est nécessaire d'après ce qui précède ; elle est aussi suffisante ainsi qu'il résulte du n° 2.11 ci-dessous.

inférieurement en x). Il serait aussi intéressant de caractériser les opérateurs de diffusion P de classe semi-continue pour lesquels il existe un opérateur de Levy S tel que $A = P + S$ applique $C^2_k(\Omega)$ dans $C(\Omega)$.

1.7. - Le théorème d'Aisenstat, énoncé au § 0, est une conséquence du corollaire 2 du théorème 1.5 : en effet, le principe du maximum positif local pour A entraîne que $Af(x) = 0$ pour toute fonction $f \in C^2(\Omega)$ nulle au voisinage de x ; donc que A est de caractère local (supp $Af \subset$ supp f , $\forall f \in C^2(\Omega)$) . Il suffit donc de considérer la restriction de A à $C^2_k(\Omega)$ pour conclure.

1.8. Remarque : Semi-ellipticité et ellipticité de la partie différentielle. - Afin de ramener son axiomatique du problème de Dirichlet au cas classique d'un opérateur elliptique du second ordre, TAUTZ cite, et utilise dans [9], p. 239, le théorème d'Aisenstat énoncé ci-dessus au § 0, mais ceci en incluant dans la conclusion le fait que la matrice $[a^{ij}(x)]$ est "définie positive" en chaque $x \in \Omega$. Cette assertion est évidemment abusive puisque le principe du maximum local est satisfait par les opérateurs P de la forme (1.2), la matrice $[a^{ij}(x)]$ étant seulement positive, mais éventuellement non définie (dégénérée).

§ 2. Démonstrations des résultats du § 1.

2.1. LEMME préliminaire. - Soient K un compact de Ω , et θ une fonction de $C^2_k(\Omega)$ telle que $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ et $\theta(y) = 1$ pour tout $y \in K$.

Alors, pour tout $x \in \Omega$, et tout $y \in \Omega$,

$$(2.1) \qquad |f(y)| \leqslant \frac{n}{2} \|f\|_{(2)} \theta(y) |y - x|^2$$

pour toute fonction $f \in C^2_k(\Omega)$ à support dans K et telle que

$$(2.2) \qquad f(x) = 0 , \qquad D_i f(x) = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \quad .$$

En effet, cela résulte de la formule de Taylor avec reste sous forme intégrale appliquée à f qui s'écrit, compte tenu de (2.2) et après avoir prolongé f à R^n tout entier par 0 hors de Ω :

$$(2.3) \qquad f(y) = \sum_{i,j=1}^{n} (y^i - x^i)(y^j - x^j) \int_0^1 D_i D_j f(x + t(y - x))(1 - t)\, dt \quad .$$

2.2. - On commence par la propriété énoncée dans le corollaire 1 du n° 1.5 : le caractère presque positif de A entraîne sa continuité de $C^2_k(\Omega)$ dans $B(\Omega)$.

Tout d'abord, la forme la plus simple de ce résultat, qui montre bien ce qui se passe :

LEMME. - Si A est une application linéaire presque positive (n° 1.2, propriété (P)) de $C_k^2(\Omega)$ dans $B(\Omega)$, A est continue.

En effet, en vertu du théorème du graphe fermé, il suffit d'établir que, pour chaque compact K de Ω et chaque $x \in \Omega$, il existe une constante $c(K, x)$ telle que

(2.4) $$|Af(x)| \leqslant c(K, x) \, \|f\|_{(2)} \quad \text{pour tout } f \in C_k^2(K) .$$

Or, désignant par σ une fonction unité locale (n° 1.1), on définit (x étant ici fixé ainsi que K) une fonction f_x de $C_k^2(\Omega)$ en posant, pour $f \in C_k^2(K)$ et $y \in \Omega$,

(2.5) $$f_x(y) = f(y) - f(x)\, \sigma_x(y) - \sum_{i=1}^{n} D_i f(x)\, \sigma_x^i(y) \;;$$

et on a

(2.6) $$f = f(x)\, \sigma_x + \sum_{i=1}^{n} D_i f(x)\, \sigma_x^i + f_x ,$$

et

(2.7) $$f_x(x) = D_i f_x(x) = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) .$$

Appliquant A aux deux membres de (2.5), on obtient :

(2.8) $$Af(x) = f(x)\, A(\sigma_x)(x) + \sum_{i=1}^{n} D_i f(x)\, A(\sigma_x^i)(x) + Af_x(x) .$$

Par ailleurs, d'après le lemme préliminaire, et (2.7), désignant par ψ_x une fonction de $C_k^2(\Omega)$ telle que

$$\psi_x \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \psi_x(y) = |y - x|^2 \quad \text{pour tout } y \in K \cup \operatorname{supp} \sigma_x ,$$

on a

$$|f_x| \leqslant \frac{n}{2} \|f_x\|_{(2)}\, \psi_x \;;$$

donc, en vertu du caractère presque positif de A, puisque $f_x(x) = \psi_x(x) = 0$,

(2.9) $$|Af_x(x)| \leqslant \frac{n}{2} \|f_x\|_{(2)}\, A\psi_x(x) .$$

L'existence de $c(K, x)$ en résulte : d'après (2.5), il existe une constante $c'(K, x)$ telle que

$$\|f_x\|_{(2)} \leqslant c'(K\,,\,x)\ \|f\|_{(2)} \qquad \text{pour tout} \quad f \in C_k^2(K) \quad ;$$

d'où, d'après (2.8) et (2.9),

$$|Af(x)| \leqslant [A\sigma_x(x) + \sum_{i=1}^{n} |A\sigma_x^i(x)| + \frac{n}{2}\, c'(K\,,\,x)\ A\psi_x(x)]\ \|f\|_{(2)} \quad .$$

C. Q. F. D.

Remarque. - La démonstration précédente établit en particulier que, si $\mathcal{U}$ est un sous-espace vectoriel de $C_k^2(\Omega)$ tel que $C_k^\infty(\Omega) \subset \mathcal{U}$: est distribution d'ordre 2 sur Ω toute forme linéaire T sur $\mathcal{U}$ pour laquelle il existe un point $x \in \Omega$ tel que,

$$f \in \mathcal{U}\ ,\quad f \geqslant 0 \quad \text{et} \quad f(x) = 0 \implies \langle T\,,\,f\rangle \geqslant 0 \quad .$$

2.3. - Dans le cas général où A est seulement définie sur un sous-espace (riche) D de $C_k^2(\Omega)$, le théorème du graphe fermé n'assure plus l'uniformité locale en x de (2.4). Il faut donc affiner la démonstration précédente pour lui faire rendre cette uniformité. Suivant WALDENFELS dans [10] et [11], on peut procéder comme suit : Fixant un compact K et un point x_0 de Ω , on va construire, pour x voisin de x_0 , des fonctions η_x^0 , η_x^i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et φ_x qui joueront le rôle de σ_x , σ_x^i , ψ_x du numéro précédent, mais avec, en plus, la propriété que

$$A\eta_x(x) + \sum_i |A\eta_x^i(x)| + A\varphi_x(x)$$

sera borné pour x voisin de x_0 . Précisément :

2.4. LEMME. - Soient D un sous-espace riche (n° 1.0) de $C_k^2(\Omega)$, et A une application linéaire presque positive (n° 1.2) de D dans $B(\Omega)$. Alors, pour tout $x_0 \in \Omega$ et tout compact K de Ω , il existe un compact L , un voisinage V de x_0 dans Ω , et, pour chaque $x \in V$, des fonctions η_x^0 , η_x^i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et φ_x de D à support dans L , de telle sorte que :

D'une part, pour chaque $x \in V$,

(2.10) $\quad \eta_x^0(x) = 1 \quad$ et $\quad D_k\, \eta_x^0(x) = 0 \quad$ pour $\quad 1 \leqslant k \leqslant n$,

(2.11) $\quad \eta_x^i(x) = 0 \quad$ et $\quad D_k\, \eta_x^i(x) = \delta_k^i \quad$ pour $\quad 1 \leqslant i\ ,\ k \leqslant n$,

(2.12) $\quad \varphi_x(x) = 0 \quad$ et $\quad 1_K(y)\,|y - x|^2 \leqslant \varphi_x(y) \quad$ pour tout $\quad y \in \Omega$.

D'autre part,

(2.13) $$\sup_{x\in V} \|\eta_x^i\|_{(2)} < +\infty \qquad (0 \leqslant i \leqslant n) \quad ,$$

$$\left|\begin{array}{ll} (2.14) & \sup_{x\in V} |A\eta^i_x(x)| < +\infty \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) \ , \\ (2.15) & \sup_{x\in V} A\varphi_x(x) < +\infty \ . \end{array}\right.$$

Soient donc $x_0 \in \Omega$, et K un compact de Ω.

(α) On construit d'abord des fonctions η^0_x, η^1_x, ..., η^n_x. Pour cela, on désigne, pour chaque $y \in \Omega$, par $S(y)$ la matrice :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x_0}(y) & D_1\,\sigma_{x_0}(y) & \dots & D_n\,\sigma_{x_0}(y) \\ \sigma^1_{x_0}(y) & D_1\,\sigma^1_{x_0}(y) & \dots & D_n\,\sigma^1_{x_0}(y) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma^n_{x_0}(y) & D_1\,\sigma^n_{x_0}(y) & \dots & D_n\,\sigma^n_{x_0}(y) \end{bmatrix} ,$$

et on remarque que $S(x_0)$ étant la matrice identité par définition de σ_{x_0} et des $\sigma^i_{x_0}$ (n° 1.1), $S(x)$ est inversible pour tout x assez voisin de x_0.

Utilisant alors le fait que D est riche (n° 1.0), on peut trouver un compact L_1 de Ω, un voisinage relativement compact V_1 de x_0, et des fonctions f^0, f^1, ..., f^n de D à support dans L_1 approchant respectivement σ_{x_0}, $\sigma^1_{x_0}$, ..., $\sigma^n_{x_0}$ d'assez près en norme $\| \ \|_{(2)}$ pour que la matrice :

$$\tilde{S}(x) = \begin{bmatrix} f^0(x) & D_1\,f^0(x) & \dots & D_n\,f^0(x) \\ f^1(x) & D_1\,f^1(x) & \dots & D_n\,f^1(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^n(x) & D_1\,f^n(x) & \dots & D_n\,f^n(x) \end{bmatrix}$$

soit inversible pour tout $x \in V_1$.

Désignant, pour chaque $x \in V_1$, par $T(x) = (\tau^k_i(x))_{1\leqslant i,k\leqslant n}$ la matrice inverse de $\tilde{S}(x)$, on note que les $\tau^k_i(\cdot)$ sont des fonctions continues donc bornées sur V_1, et on pose, pour $x \in V_1$,

$$\eta^i_x = \sum_{j=1}^{n} \tau^i_j(x)\, f^j \qquad (0 \leqslant i \leqslant n) \ .$$

Il est facile de vérifier que les fonctions η^i_x $(1 \leqslant i \leqslant n\ ,\ x \in V_1)$ ont les propriétés requises.

(β) On construit ensuite les fonctions φ_x à partir des fonctions $\eta_x^0, \ldots, \eta_x^n$. Pour cela, on désigne d'abord par θ une fonction de $C_k^2(\Omega)$, telle que $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ et $\theta(y) = 1$ pour tout $y \in K \cup V_1$, on pose

$$\psi_x(y) = \theta(y)|y - x|^2 \qquad \text{pour } x \in \Omega\ ,\quad y \in \Omega\ ,$$

et on remarque que l'application $x \longrightarrow \psi_x$ est continue de Ω dans $C_k^2(L_2)$, où L_2 désigne le support compact de θ. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage relativement compact $V_2(\varepsilon)$ de x_0 dans Ω tel que, pour $x \in V_2(\varepsilon)$,

$$(2.16) \qquad \|\psi_x - \psi_{x_0}\|_{(2)} \leqslant \varepsilon\ ,\quad |\psi_{x_0}(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad |D_i\, \psi_{x_0}(x)| \leqslant \varepsilon \quad (1 \leqslant i \leqslant n)\ .$$

Par ailleurs, puisque D est riche, il existe un compact L_3 de Ω contenant L_2 à son intérieur, et pour tout $\varepsilon > 0$ une fonction g_ε de D telle que

$$(2.17) \qquad \|g_\varepsilon - \psi_{x_0}\|_{(2)} \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \operatorname{supp} g_\varepsilon \subset L_3\ .$$

Posant alors, pour $x \in V_2(\varepsilon) \cap V_1$,

$$(2.18) \qquad \varphi_x^\varepsilon = g_\varepsilon - g_\varepsilon(x)\, \eta_x^0 - \sum_{i=1}^n D_i\, g_\varepsilon(x)\, \eta_x^i\ ,$$

on remarque que $\varphi_x^\varepsilon \in C_k^2(L_1 \cup L_3)$ et que, pour $x \in V_2(\varepsilon) \cap V_1$,

$$\|\varphi_x^\varepsilon - \psi_x\|_{(2)} \leqslant \|g_\varepsilon - \psi_{x_0}\|_{(2)} + \|\psi_{x_0} - \psi_x\|_{(2)} + |g_\varepsilon(x)|\ \|\eta_x^0\|_{(2)} + \sum_{i=1}^n |D_i\, g_\varepsilon(x)|\ \|\eta_x^i\|_{(2)}\ .$$

Compte tenu de la propriété (2.13) de $\eta_x^0, \ldots, \eta_x^i$, et de (2.16) et (2.17), on en déduit l'existence d'une constante $c > 0$ telle que

$$\|\varphi_x^\varepsilon - \psi_x\|_{(2)} \leqslant c\varepsilon \qquad \text{pour tout } \varepsilon > 0 \text{ et } x \in V_2(\varepsilon) \cap V_1\ .$$

Ainsi, prenant $\varepsilon = \varepsilon_0 \leqslant \frac{1}{nc}$, on a

$$\|\varphi_x^{\varepsilon_0} - \psi_x\|_{(2)} \leqslant \frac{1}{n} \qquad \text{pour tout } x \in V_2(\varepsilon_0) \cap V_1\ .$$

Par ailleurs, d'après sa définition même (relation (2.18)), on a

$$\varphi_x^{\varepsilon_0}(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad D_i\, \varphi_x^{\varepsilon_0}(x) = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n\ ,\ x \in V_2(\varepsilon_0) \cap V_1)\ ;$$

donc, d'après le lemme préliminaire (n° 2.1), pour $y \in K$ et $x \in V_2(\varepsilon_0) \cap V_1$,

$$|\varphi_x^{\varepsilon_0}(y) - \psi_x(y)| \leqslant \frac{n}{2}\, \|\varphi_x^{\varepsilon_0} - \psi_x\|_{(2)}\, \psi_x(y) \leqslant \frac{1}{2}\, \psi_x(y)\ .$$

Et finalement,

$$\psi_x(y) \leqslant 2\varphi_x^{\varepsilon_0}(y) \qquad \text{pour} \quad x \in V_2(\varepsilon_0) \cap V_1 \quad \text{et} \quad y \in K \ .$$

Il suffit alors de prendre $V = V_2(\varepsilon_0) \cap V_1$, $L = L_1 \cup L_3$, et $\varphi_x = 2\varphi_x^{\varepsilon_0}$, pour obtenir les propriétés annoncées.

Le lemme est ainsi établi.

2.5. - A partir du lemme 2.4, on établit le corollaire 1 du théorème 1.5 par la méthode employée au n° 2.2 : il suffit (voir le n° 2.3) de remplacer les fonctions σ_x , σ_x^1 , ... , σ_x^n par η_x^0 , η_x^1 , ... , η_x^n , et ψ_x par φ_x pour obtenir (avec les notations du lemme 2.4) :

$$|Af(y)| \leqslant \sup_{x\in V} (A\eta_x^0(x) + \sum_{i=1}^{n} |A\eta_x^i(x)| + A\varphi_x(x)) \, \|f\|_{(2)}$$

pour tout $x \in V$ et tout $f \in C_k^2(K)$.

2.6. - Un développement de Taylor $\Delta_x f$ $(f \in C_k^2(\Omega))$ convenablement normalisé va jouer un rôle essentiel dans la démonstration des théorèmes 1.4 et 1.5 : Désignant par σ une fonction unité locale (n° 1.1), on pose, pour chaque $f \in C_k^2(\Omega)$, $x \in \Omega$, $y \in \Omega$,

$$T_x f(y) = f(x)\, \sigma_x(y) + \sum_{i=1}^{n} D_i f(x)\, \sigma_x^i(y) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} D_i D_j f(x)\, \sigma_x^i(y)\, \sigma_x^j(y) , \tag{2.19}$$

et

$$\Delta_x f(y) = \frac{f(y) - T_x f(y)}{|y - x|^2} \qquad \text{si} \quad y \neq x , \tag{2.20}$$

$$\Delta_x f(x) = 0 \ . \tag{2.21}$$

LEMME. - Pour chaque $f \in C_k^2(\Omega)$,

(u) la fonction $(x , y) \longrightarrow \Delta_x f(y)$ est continue sur $\Omega \times \Omega$,

(uu) il existe un compact L de Ω tel que $\Delta_x f$ a son support dans L pour tout $x \in \Omega$,

(uuu) pour tout $x_0 \in \Omega$, $\lim\limits_{x\to x_0} \|\Delta_x f - \Delta_{x_0} f\| = 0$.

En effet, la continuité de $(x , y) \longrightarrow \Delta_x f(y)$ en un point (x_0 , y_0) tel que $x_0 \neq y_0$ résulte clairement de (2.20). La continuité en un point (x_0 , x_0) résulte de la formule de Taylor, avec reste sous forme intégrale appliquée à f , qui donne, pour (x , y) assez voisin de (x_0 , x_0) , en vertu de la propriété (i) de σ (n° 1.1) :

$$f(y) - T_x f(y) = \sum_{i,j=1}^{n} (y^i - x^i)(y^j - x^j) \int_0^1 [D_i D_j f(x + t(y - x)) - D_i D_j f(x)](1 - t)\, dt \quad .$$

D'où la propriété (u).

La propriété (uu) résulte de ce que f est à support compact et de la propriété (ii) de σ . Enfin, (uuu) résulte de (u) et (uu).

C. Q. F. D.

2.7. Invariance par difféomorphisme des propriétés de régularité des noyaux singuliers.

LEMME. - Soient N un noyau singulier sur Ω de classe semi-continue (n° 1.4) σ une fonction unité locale sur Ω , et ν une fonction de $B(\Omega)$ positive et semi-continue supérieurement telle que, pour tout $f \in C_k(\Omega)$, la fonction

$$x \longrightarrow \int_\Omega N(x , dy)|y - x|^2 f(y) + \nu(x) f(x)$$

soit continue sur Ω . Soit, par ailleurs, Φ une fonction continue sur $\Omega \times \Omega$ et $f \in C_k(\Omega)$. Alors,

(v) La fonction $x \longrightarrow \int_\Omega N(x , dy)|y - x|^2 \Phi(x , y) f(y) + \nu(x) \Phi(x , x) f(x)$ est continue sur Ω . En particulier, si N est de classe C^0 , la fonction $x \longrightarrow \int_\Omega N(x , dy)|y - x|^2 \Phi(x , y) f(y)$ est continue sur Ω .

(vv) Si N est de classe C^0 , pour $1 \leqslant i , j \leqslant n$, la fonction

$$x \longrightarrow \int_\Omega N(x , dy)(y^i - x^i)(y^j - x^j) \Phi(x , y) f(y)$$

est continue sur Ω (15)..

En effet (16), posant, pour chaque $f \in C_k(\Omega)$ et $x \in \Omega$,

$$\int_\Omega \tilde{N}(x , dy) f(y) = \int_\Omega N(x , dy)|y - x|^2 f(y) + \nu(x) f(x) \quad ,$$

on définit, d'après l'hypothèse sur ν , un noyau continu $\tilde{N}$ sur Ω ($\tilde{N}f \in C(\Omega)$ pour tout $f \in C_k(\Omega)$) . Posant alors $\Phi_1(x , y) = \Phi(x , y) f(y)$, et

$$F(x) = \int_\Omega N(x , dy)|y - x|^2 \Phi(x , y) f(y) + \nu(x) \Phi(x , x) f(x) = \int_\Omega \tilde{N}(x , dy) \Phi_1(x , y) \quad ,$$

on a,

$$F(x) - F(x_0) \leqslant \int_\Omega \tilde{N}(x , dy)|\Phi_1(x , y) - \Phi_1(x_0 , y)| + \left|\int_\Omega \tilde{N}(x , dy) \Phi_1(x_0 , y) - \int_\Omega \tilde{N}(x_0 , dy) \Phi_1(x_0 , y)\right| \quad .$$

---

(15) Voir le n° 1.6.

(16) Les idées de cette démonstration sont dues à J.-M. BONY.

Lorsque x tend vers x_0, le deuxième terme tend vers 0 à cause de la continuité de $\tilde{N}$. Le premier est majoré, pour x appartenant à un voisinage compact V de x_0, par

$$\|\Phi_1(x\,,\,.) - \Phi_1(x_0\,,\,.)\| \int_\Omega \tilde{N}(x\,,\,dy)\,\theta(y) \quad ,$$

où θ est une fonction de $C_k(\Omega)$ positive et égale à 1 sur un compact de Ω contenant les supports des fonctions $\Phi_1(x\,,\,.)$ $(x \in V)$. D'où (v).

Pour établir (vv), on définit le noyau continu $\tilde{N}$ comme ci-dessus mais avec $\nu = 0$; $x_0 \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$ étant donnés, on désigne par φ_ε une fonction de $C_k(\Omega)$ telle que $0 \leqslant \varphi_\varepsilon \leqslant 1$, $\varphi_\varepsilon(x) = 1$ pour x voisin de x_0, et

$$\int_\Omega \tilde{N}(x_0\,,\,dy)\,\varphi_\varepsilon(y) < \varepsilon \quad . \tag{2.22}$$

Puisque $x \longrightarrow \int_\Omega \tilde{N}(x\,,\,dy)\,\varphi_\varepsilon(y)$ est continue, il existe un voisinage ouvert $V(\varepsilon)$ de x_0 tel que

$$\int_\Omega \tilde{N}(x\,,\,dy)\,\varphi_\varepsilon(y) < \varepsilon \quad \text{et} \quad \varphi_\varepsilon(x) = 1 \quad \text{pour tout} \quad x \in V(\varepsilon) \quad . \tag{2.23}$$

Ceci étant, en posant

$$F_{ij}(x) = \int_\Omega N(x\,,\,dy)(y^i - x^i)(y^j - x^j)\,\Phi(x\,,\,y)\,f(y)$$

et

$$\psi_{ij}(x\,,\,y) = \frac{(y^i - x^i)(y^j - x^j)}{|y - x|^2}\,\Phi(x\,,\,y)\,f(y)$$

$(y \neq x)$, on a

$$|F_{ij}(x) - F_{ij}(x_0)| \leqslant \left|\int_\Omega \tilde{N}(x\,,\,dy)\,\varphi_\varepsilon(y)\,\psi_{ij}(x\,,y)\right| + \left|\int_\Omega \tilde{N}(x_0\,,\,dy)\,\varphi_\varepsilon(y)\,\psi_{ij}(x_0\,,y)\right|$$
$$+ \left|\int_\Omega \tilde{N}(x\,,dy)(1 - \varphi_\varepsilon(y))\,\psi_{ij}(x\,,y) - \int_\Omega \tilde{N}(x_0\,,dy)(1 - \varphi_\varepsilon(y))\,\psi_{ij}(x_0\,,y)\right| .$$

D'où (vv), puisque, d'une part, $|\psi_{ij}(x\,,\,y)|$ étant borné par $\|\Phi f\|$, les deux premiers termes sont moindres que $\varepsilon\|\Phi f\|$ quand $x \in V(\varepsilon)$ d'après (2.23) ; et d'autre part, la fonction $(x\,,\,y) \longrightarrow (1 - \varphi_\varepsilon(y))\,\psi_{ij}(x\,,\,y)$ étant continue sur $V(\varepsilon) \times \Omega$, le troisième terme tend vers zéro quand x tend vers x_0 d'après (v).

C. Q. F. D.

Du lemme précédent, on déduit l'invariance par difféomorphisme des propriétés de régularité des noyaux singuliers (lemme 1.4, alinéa 1)) : avec les notations du lemme, il suffit de montrer que, si N est de classe C^0, la fonction

$$x \longrightarrow \int_\Omega N(x\,,\,dy)\,|\Lambda(y) - \Lambda(x)|^2\,f(y)$$

est continue sur Ω pour tout $f \in C_k(\Omega)$. Or, on peut écrire

$$|\Lambda(y) - \Lambda(x)|^2 = \sum_i (\Lambda^i(y) - \Lambda^i(x))^2 \quad ;$$

ou encore, en développant $\Lambda^i(y) - \Lambda^i(x)$ par la formule de Taylor,

$$|\Lambda(y) - \Lambda(x)|^2 = \sum_{k,\ell} (y^k - x^k)(y^\ell - x^\ell)\ \theta_{k\ell}(x\ ,\ y) \quad ,$$

où les fonctions $\theta_{k\ell}$ sont continues sur $\Omega \times \Omega$. On conclut alors en utilisant l'alinéa (vv) du lemme.

2.8. Démonstration du théorème 1.4.

(α) Tout d'abord, en vertu de la propriété (NS_2) de N , la fonction Sf définie par la relation (1.5) (n° 1.4) est dans $B(\Omega)$ pour chaque $f \in C_k^2(\Omega)$. Par ailleurs, il est clair que l'application $f \longrightarrow Sf$ de $C_k^2(\Omega)$ dans $B(\Omega)$ ainsi défini est presque positive (propriété (P), n° 1.2). Il résulte donc du lemme 2.2 que cette application est continue de $C_k^2(\Omega)$ dans $B(\Omega)$ [on notera que cette propriété de S peut être aussi établie sur la forme (1.5) de S en remarquant que, d'après la formule de Taylor avec reste intégral,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{(2)} = 0 \quad \text{entraîne} \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{x,y\in K\times K} |f_n(y) - f_n(x) - \sum_{i=1}^{n} D_i\ f_n(x)(y^i - x^i)| = 0$$

pour tout compact K de Ω]. D'où la propriété (1) du théorème 1.4.

(β) Si S applique $C_k^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$, γ et γ^i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont continus et N est de classe C^0 . En effet, on a d'abord

$$\gamma(x) = S(\sigma_x)(x) \qquad \text{et} \qquad \gamma^i(x) = S(\sigma_x^i)(x) \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \quad ;$$

on en déduit la continuité de γ et γ^i en écrivant (par exemple pour γ) :

$$\gamma(x) - \gamma(x_0) = S(\sigma_x - \sigma_{x_0})(x) + S(\sigma_{x_0})(x) - S(\sigma_{x_0})(x_0) \quad ,$$

et en remarquant que, lorsque x tend vers x_0 , le premier terme tend vers 0 en vertu de la continuité de S de $C_k^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$, et de la continuité de l'application $x \longrightarrow \sigma_x$ de Ω dans $C_k^2(\Omega)$ (compte tenu de la propriété (ii) de σ (n° 1.1)) ; tandis que le second tend vers 0 puisque $S(\sigma_{x_0}) \in C(\Omega)$ par hypothèse.

Par un argument analogue, on voit ensuite que, pour $f \in C_k^2(\Omega)$, l'application $x \longrightarrow \int_\Omega N(x\ ,\ dy)|y - x|^2\ f(y)$ est continue : il suffit de remarquer que, posant $F_x(y) = |y - x|^2\ f(y)$, l'application $x \longrightarrow F_x$ est continue de Ω dans

$C_k^2(\Omega)$ et que

$$\int_\Omega N(x\,,\,dy)\,|y-x|^2\,f(y) = S(F_x)(x) \qquad (x\in\Omega)\quad .$$

Enfin, soient $f \in C_k(\Omega)$, et f_n une suite de fonctions de $C_k^2(\Omega)$ tendant vers f dans $C_k(\Omega)$ en gardant leurs supports dans un compact fixe H . On a,

$$\left|\int_\Omega N(x\,,dy)|y-x|^2 f(y) - \int_\Omega N(x\,,dy)|y-x|^2 f_n(y)\right| \leqslant \|f-f_n\| \int_\Omega N(x\,,dy)\,|y-x|^2\,\theta(y)$$

où $\theta \in C_k(\Omega)$ vaut 1 sur $H \cup \operatorname{supp} f$. D'où la continuité de

$$x \longrightarrow \int_\Omega N(x\,,\,dy)\,|y-x|^2\,f(y)\quad .$$

(γ) Inversement, si γ et γ^i $(1\leqslant i\leqslant n)$ sont continus et si N est de classe C^0 , $Sf \in C(\Omega)$ pour tout $f\in C_k^2(\Omega)$. Pour le montrer, on remarque que l'on peut écrire, par définition même de $\Delta_x f$ (n° 2.6, relations (2.19) et (2.20)),

$$Sf(x) = \gamma(x) + \sum_{i=1}^n \gamma^i(x)\,D_i\,f(x) + \int_\Omega N(x\,,\,dy)\,|y-x|^2\,\Delta_x\,f(y)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n D_i\,D_j\,f(x)\int_\Omega N(x\,,\,dy)\,\sigma_x^i(y)\,\sigma_x^j(y)\quad .$$

Il suffit donc de montrer que les fonctions

$$x \longrightarrow \int_\Omega N(x\,,\,dy)\,|y-x|^2\,\Delta_x\,f(y) = F(x)$$

et

$$x \longrightarrow \int_\Omega N(x\,,\,dy)\,\sigma_x^i(y)\,\sigma_x^j(y) = F_{ij}(x)$$

sont continues sur Ω .

Or, d'une part, la continuité de F_{ij} résulte du lemme 2.7 déjà établi ; d'autre part, on peut écrire :

$$|F(x)-F(x_0)| \leqslant \left|\int_\Omega N(x\,,dy)\,|y-x|^2\,\Delta_{x_0}\,f(y) - \int_\Omega N(x_0\,,dy)\,|y-x_0|^2\,\Delta_{x_0}\,f(y)\right|$$
$$+\int_\Omega N(x\,,dy)\,|y-x|^2\,|\Delta_x\,f(y)-\Delta_{x_0}\,f(y)|\quad .$$

Dans le membre de droite, d'une part le premier terme tend vers zéro quand x tend vers x_0 , d'après la propriété ($NS_2^!$) de N et la propriété (uu) de $\Delta_{x_0} f$ (n° 2.6) ; d'autre part le deuxième terme est majoré par

$$\|\Delta_x\,f - \Delta_{x_0}\,f\|\int_\Omega N(x\,,\,dy)\,|y-x|^2\,\theta(y)\quad ,$$

où θ est une fonction de $C_k(\Omega)$ positive et égale à 1 sur un compact de Ω contenant les supports des fonctions $\Delta_x f$ (propriété (uu) de $\Delta_x f$, n° 2.6). D'où finalement :

$$\lim_{x \to x_0} [F(x) - F(x_0)] = 0 \quad ,$$

d'après la propriété (uuu) de $\Delta_x f$. La propriété (2) est ainsi établie.

(δ) Afin d'établir la propriété (3), on désigne par (θ_n) une suite croissante de fonctions $\geqslant 0$ de $C_k^2(\Omega)$ comprises entre 0 et 1 et telles que, pour tout compact K de Ω , il existe un entier n tel que $\theta_n(y) = 1$ pour tout $y \in K$.

Supposant d'abord que S satisfait au principe du maximum positif, on a, pour $x \in \Omega$ et n assez grand pour que $\theta_n = 1$ au voisinage de x , d'une part :

$$S\theta_n(x) = \gamma(x) + \int_\Omega N(x\ ,\ dy)(1 - \sigma_x(y)) \quad ,$$

et d'autre part :

$$S\theta_n(x) \leqslant 0$$

puisque θ_n passe par un maximum positif en x , d'où la relation (1.6), et le caractère borné à l'infini de N . Inversement, si (1.6) est satisfaite, et si $f \in C_k^2(\Omega)$ passe par un maximum positif en x , on a

$$D_i\, f(x) = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \qquad \text{et} \qquad f(y) - \sigma_x(y)\, f(x) \leqslant f(x)(1 - \sigma_x(y)) \quad ;$$

donc,

$$Sf(x) \leqslant [\gamma(x) + \int_\Omega N(x\ ,\ dy)(1 - \sigma_x(y))]\, f(x) \leqslant 0 \quad .$$

La propriété (3) du théorème 1.4 est ainsi établie.

La relation (1.7) découle directement de (1.5). On en déduit la propriété (4), puisque, si S satisfait au principe du maximum positif local, on doit avoir $Sf(x) = 0$ pour tout $f \in C_k^2(\Omega)$ nulle au voisinage de x .

Le théorème 1.4 est ainsi établi.

2.9. Remarque. - Le caractère borné à l'infini du noyau singulier N , lorsque S satisfait au principe du maximum positif, rejoint le fait que, dans la formule de Levy-Khinčin, la mesure qui intervient est elle aussi bornée à l'infini (voir [2], n° 7, théorème 3, et ci-dessous le n° 3.4).

2.10. Démonstration du théorème 1.5 et de son corollaire 3.

(α) En vertu du corollaire 1 déjà établi aux numéros 2.2 à 2.5 ci-dessus, on part d'une application linéaire A de $C_k^2(\Omega)$ dans $B(\Omega)$ presque positive et de ce fait continue.

Pour faire apparaître P et S , on procède comme suit : Désignant, pour chaque

$x \in \Omega$, par ψ_x la fonction $y \longrightarrow |y - x|^2$, on considère une fonction unité locale σ (n° 1.1), et, pour chaque $f \in C_k^2(\Omega)$ et $x \in \Omega$, les développements $T_x f$ et $\Delta_x f$ associés (n° 2.6), de telle sorte que

$$(2.24) \qquad f = T_x f + \psi_x \Delta_x f \qquad (x \in \Omega\ ,\ f \in C_k^2(\Omega)) \ .$$

Comme $T_x f \in C_k^2(\Omega)$, cette relation entraîne que $\psi_x \Delta_x f$ appartient aussi à $C_k^2(\Omega)$; on peut donc appliquer A aux deux membres de (2.24), ce qui donne :

$$(2.25) \qquad Af(x) = A(T_x f)(x) + A(\psi_x \Delta_x f)(x) \ .$$

On va étudier chacun des termes figurant au second membre de (2.25) :

(β) Le terme $A(T_x f)(x)$ définit un opérateur différentiel semi-elliptique $\tilde{P}$: en explicitant $T_x f$ (relation (2.19), n° 2.6), on obtient en effet, pour $f \in C_k^2(\Omega)$ et $x \in \Omega$:

$$(2.26) \qquad \tilde{P}f(x) = A(T_x f)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}^{ij}(x)\, D_i D_j f(x) + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\, D_i f(x) + \gamma(x)\, f(x) \ ,$$

où l'on a posé :

$$(2.27) \qquad \tilde{a}^{ij}(x) = \frac{1}{2} A(\sigma_x^i \sigma_x^j)(x) \qquad (1 \leqslant i\ ,\ j \leqslant n) \ ,$$

$$(2.28) \qquad b^i(x) = A(\sigma_x^i)(x) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) \ ,$$

$$(2.29) \qquad \gamma(x) = A(\sigma_x)(x) \ ;$$

les fonctions $\tilde{a}^{ij}$, b^i et γ étant boréliennes et localement bornées sur Ω , ainsi qu'on le voit (par exemple pour $\tilde{a}^{ij}$) en remarquant que l'application $x \longrightarrow A(\sigma_x^i \sigma_x^j)$ de Ω dans $B(\Omega)$ étant continue (17), on a

$$\tilde{a}^{ij}(x) = A(\sigma_x^i \sigma_x^j)(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{q=0}^{\infty} 1_{U_q^n}(x)\, A(\sigma^i_{x_q^n} \sigma^j_{x_q^n})(x)$$

où, pour chaque n , $(U_q^n)_{q\geqslant 0}$ est une partition borélienne de Ω telle que le diamètre de U_q^n soit moindre que $\frac{1}{n}$, et où, pour chaque n , q , $x_q^n \in U_q^n$.

De plus, si A applique $C_k^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$, les fonctions $\tilde{a}^{ij}$, b^i et γ sont continues sur Ω : on le voit en écrivant, par exemple pour b^i :

$$|b^i(x) - b^i(x_0)| \leqslant |A(\sigma_x^i - \sigma_{x_0}^i)(x)| + |A(\sigma_{x_0}^i)(x) - A(\sigma_{x_0}^i)(x_0)| \ .$$

---

(17) Comme composée de $x \longrightarrow \sigma_x^i \sigma_x^j$, continue de Ω dans $C_k^2(\Omega)$ d'après la propriété (ii) de σ , et de A (lemme 2.2).

Lorsque x tend vers x_0 , le premier terme tend vers zéro à cause de la continuité de l'application $x \longrightarrow A(\sigma_x^i)$ de Ω dans $B(\Omega)$, tandis que le second tend vers zéro puisque $A(\sigma_x^i) \in C(\Omega)$ par hypothèse.

Enfin, la matrice $[\tilde{a}^{ij}(x)]$ est positive :

$$\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}^{ij}(x)\ \xi_i\ \xi_j = A((\sum_i \xi_i\ \sigma_x^i)^2)(x)$$

est $\geqslant 0$ d'après le caractère presque positif de A , la fonction

$$y \longrightarrow (\sum_i \xi_i\ \sigma_x^i(y))^2$$

étant $\geqslant 0$ et nulle en x .

(γ) Le terme $A(\psi_x\, \Delta_x\, f)(x)$, figurant dans la relation (2.25), va donner naissance au noyau singulier N :

LEMME. - Il existe un noyau singulier N (n° 1.4), et un seul, tel que

(2.30) $\qquad A(\psi_x\, g)(x) = \int_\Omega N(x\ ,\ dy)\ \psi_x(y)\ g(y)$ [18] $\qquad$ pour tout $x \in \Omega$

et toute fonction $g \in C_k(\Omega)$ telle que $\psi_x\, g \in C_k^2(\Omega)$.

En particulier, pour $g = \Delta_x\, f$ $(f \in C_k^2(\Omega))$,

(2.31) $$A(\psi_x\, \Delta_x\, f)(x) = \int_\Omega N(x\ ,\ dy)\ \psi_x(y)\ \Delta_x\, f(y) \quad .$$

De plus, si A applique $C_k^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$, N est de classe semi-continue (n° 1.4).

On va construire le noyau $\tilde{N}(x\ ,\ dy) = N(x\ ,\ dy)\ \psi_x(y)$: Pour cela, on remarque d'abord que, $x \in \Omega$ étant fixé, l'application $g \longrightarrow A(\psi_x\, g)(x)$ est, en vertu du caractère presque positif de A , une forme linéaire positive sur le sous-espace H de $C_k(\Omega)$ formé des fonctions $g \in C_k(\Omega)$, telles que $\psi_x\, g \in C_k^2(\Omega)$. Comme $C_k^2(\Omega) \subset H$, il existe une mesure de Radon $\tilde{N}(x\ ,\ .)$ et une seule sur Ω telle que

(2.32) $$A(\psi_x\, g)(x) = \int_\Omega \tilde{N}(x\ ,\ dy)\ g(y) = \tilde{N}g(x) \qquad (g \in H) \quad .$$

En particulier, pour chaque $f \in C_k^2(\Omega)$,

(2.33) $$A(\psi_x\, \Delta_x\, f)(x) = \int_\Omega \tilde{N}(x\ ,\ dy)\ \Delta_x\, f(y) \quad ,$$

puisque $\psi_x\, \Delta_x\, f = f - T_x\, f \in C_k^2(\Omega)$.

En outre, pour chaque $g \in C_k(\Omega)$, la fonction $x \longrightarrow \tilde{N}g(x)$ est borélienne et

---

[18] $\psi_x(y) = |y - x|^2$ pour $x\ ,\ y \in \Omega \times \Omega$.

localement bornée sur Ω : Il suffit de vérifier que, pour $g \in C_k^2(\Omega)$, **la fonction** $x \longrightarrow A(\psi_x\, g)(x)$ est dans $B(\Omega)$, **ce qui résulte de la continuité de** $x \longrightarrow A(\psi_x\, g)$ de Ω dans $B(\Omega)$ par l'argument utilisé en (β) ci-dessus.

De plus, si A applique $C_k^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$, $\tilde{N}$ est un noyau continu sur Ω :

$$\tilde{N}g \in C(\Omega) \qquad \text{pour tout} \quad g \in C_k(\Omega) \quad .$$

D'abord, si $g \in C_k^2(\Omega)$, on a

$$\tilde{N}g(x) = A(\psi_x\, g)(x) \qquad (x \in \Omega)$$

par définition de $\tilde{N}$; et la fonction $x \longrightarrow A(\psi_x\, g)(x)$ est continue ainsi qu'on le voit comme en (β) ci-dessus pour la fonction $\tilde{a}^{ij}$, en écrivant :

$$|A(\psi_x\, g)(x) - A(\psi_{x_0}\, g)(x_0)|$$
$$\leqslant |A(\psi_x\, g)(x) - A(\psi_{x_0}\, g)(x)| + |A(\psi_{x_0}\, g)(x) - A(\psi_{x_0}\, g)(x_0)| \quad ,$$

et en utilisant la continuité de A et de $x \longrightarrow \psi_x\, g$ pour le premier terme, et celle de $A(\psi_{x_0}\, g)$ pour le second.

Ensuite, si g est une fonction quelconque de $C_k(\Omega)$, il suffit de considérer une suite (g_n) de fonctions de $C_k^2(\Omega)$ ayant toutes leur support dans un compact L de Ω et telles que $\lim\limits_{n\to\infty} \|g_n - g\| = 0$: Si θ est une fonction de $C_k^2(\Omega)$ positive et égale à 1 sur L , on a

$$|\tilde{N}(g_n - g)(x)| \leqslant \|g_n - g\|\ \tilde{N}\theta(x) \quad ;$$

ce qui montre que la suite $\tilde{N}g_n$ converge vers $\tilde{N}g$ localement uniformément ; d'où la continuité de $\tilde{N}g$.

Posant alors, pour $x \in \Omega$ et $w \in \mathcal{B}_\Omega$,

$$N(x\ ,\ w) = \int_{\Omega\setminus\{x\}} \tilde{N}(x\ ,\ dy)\ \frac{1}{|y - x|^2}\ 1_w(y) \quad ,$$

on obtient un noyau singulier N sur Ω lié à $\tilde{N}$ par la relation :

$$(2.34) \qquad \int_\Omega N(x\ ,\ dy)\,|y - x|^2\ f(y) + \tilde{N}(x\ ,\ \{x\})\ f(x) = \tilde{N}f(x) \qquad (f \in C_k(\Omega)) \quad ,$$

et satisfaisant donc les relations (2.30) et (2.31) en vertu de (2.32) et (2.33).

De plus, N satisfait la relation (1.9) (corollaire 3 du théorème 1.5), puisque toute fonction $f \in C_k^2(\Omega)$ telle que $x \notin \operatorname{supp} f$ est de **la forme** $\psi_x\, g$ où $g \in C_k^2(\Omega)$, et N est déterminé de façon unique par cette relation, puisque $N(x\ ,\ \{x\}) = 0$.

En outre, lorsque A applique $C_k^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$, le noyau N est de classe semi-continue : En vertu de (2.34), et de la continuité du noyau $\tilde{N}$ établie ci-dessus, il suffit de vérifier que la fonction $x \longrightarrow \tilde{N}(x , \{x\})$ est semi-continue supérieurement sur Ω . Or, considérant une suite décroissante (σ^n) de fonctions unité locales sur Ω telle que $1_\Delta = \inf_n \sigma^n$ (Δ désignant la diagonale de $\Omega \times \Omega$) , on a,

$$\tilde{N}(x , \{x\}) = \inf_n \int_\Omega \tilde{N}(x , dy)\, \sigma^n(x , y) \quad ;$$

d'où la semi-continuité supérieure cherchée, puisque, pour chaque n , la fonction

$$x \longrightarrow \int_\Omega \tilde{N}(x , dy)\, \sigma^n(x , y) = \tilde{N}(\sigma_x^n)(x)$$

est continue à cause de la continuité du noyau $\tilde{N}$, en vertu d'un argument standard déjà utilisé pour établir le lemme 2.7 ci-dessus.

(δ) Développant le terme $A(\psi_x \Delta_x f)(x)$ au moyen de l'expression de $\Delta_x f$ (n° 2.19) et de (2.31), on obtient :

$$(2.35)\quad \begin{cases} A(\psi_x \Delta_x f)(x) = \int_\Omega N(x , dy)[f(y) - \sigma_x(y)(f(x) + \sum_{i=1}^n D_i f(x)(y^i - x^i))] \\ \qquad\qquad - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n D_i D_j f(x) \int_\Omega N(x , dy)\, \sigma_x^i(y)\, \sigma_x^j(y) \ . \end{cases}$$

Ce qui donne exactement l'expression (1.8) de $Af(x)$ en rapprochant (2.35) de (2.25) et (2.26) ci-dessus ; les coefficients a^{ij} , b^i et γ étant donnés par les relations (1.10), (1.11) et (1.12) (n° 1.5), compte tenu de (2.27), (2.28) et (2.29).

Le caractère positif de la matrice $[a^{ij}(x)]_{1\leq i,j\leq n}$ peut être établi comme suit: En vertu de (1.10), on a, pour chaque $\xi = (\xi_i) \in R^n$,

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j = \frac{1}{2}\, [A(h)(x) - \int_\Omega N(x , dy)\, h(y)] \quad ,$$

où l'on a posé

$$h = (\sum_{i=1}^n \xi_i\, \sigma_x^i)^2 \quad .$$

Notant que $h \in C_k^2(\Omega)$, $h \geq 0$, et $h(x) = D_i h(x) = 0$ $(1 \leq i \leq n)$, on est ramené au lemme suivant :

LEMME. - Pour tout $h \in C_k^2(\Omega)$ et tout $x \in \Omega$, tels que

(2.36) $\qquad h \geq 0 \quad$ et $\quad h(x) = D_i h(x) = 0$, $(1 \leq i \leq n)$, on a

$$Ah(x) - \int_\Omega N(x\ ,\ dy)\ h(y) \geqslant 0 \quad .$$

En effet, désignant par φ une fonction de $C_k^2(\Omega)$ comprise entre 0 et 1 et égale à 1 au voisinage de x, on a, d'après le caractère presque positif de A, et (2.36),

$$Ah(x) \geqslant A((1-\varphi)h)(x) \quad ;$$

donc,

$$(2.37)\quad \begin{cases} Ah(x) - \int_\Omega N(x\ ,\ dy)\ h(y) \\ \qquad \geqslant A((1-\varphi)h)(x) - \int_\Omega N(x\ ,\ dy)(1-\varphi)\ h(y) - \int_\Omega N(x\ ,\ dy)\ \varphi h(y) \\ \qquad\qquad \geqslant - \int_\Omega N(x\ ,\ dy)\ \varphi h(y)\ \text{, d'après (1.9) (n° 1.5),} \end{cases}$$

puisque $x \notin \operatorname{supp}(1-\varphi)h$.

Mais, la relation (2.36) et le lemme préliminaire (n° 2.1) entraînent que, si V est un voisinage ouvert du support de φ , $\varphi h(y) \leqslant \frac{n}{2}\, \|h\|_{(2)}\ |y-x|^2\ 1_V(y)$ pour tout $y \in \Omega$; donc

$$\int_\Omega N(x\ ,\ dy)\ \varphi h(y) \leqslant \frac{n}{2}\, \|h\|_{(2)} \int_V N(x\ ,\ dy)\,|y-x|^2 \quad .$$

Le théorème de Lebesgue, joint à la propriété (NS_1) du noyau N (n° 1.4), entraînent alors que l'on peut choisir φ de sorte que $\int N(x\ ,\ dy)\ \varphi h(y)$ soit arbitrairement petit. La relation (2.37) entraîne donc que

$$Ah(x) - \int_\Omega N(x\ ,\ dy)\ h(y) \geqslant 0 \quad .$$

D'où le lemme.

(ε) Lorsque, de plus, A applique $C_k^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$, on a déjà vu en (β) et (γ) ci-dessus que les coefficients γ et b^i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont continus, et que le noyau N est de classe semi-continue. Il reste à montrer que P est aussi de classe semi-continue, autrement dit (n° 1.3) que, pour tout $\xi = (\xi_i) \in R^n$, la fonction $x \longrightarrow \sum_{i,j} a^{ij}(x)\ \xi_i\ \xi_j$ est semi-continue supérieurement ; ou encore (relation 1.10), puisque les fonctions $x \longrightarrow \tilde{a}^{ij}(x) = A(\sigma_x^i\ \sigma_x^j)(x)$ sont continues, que les fonctions

$$x \longrightarrow \int_\Omega N(x\ ,\ dy)(\sum_i \sigma_x^i(y)\ \xi_i)^2$$

sont semi-continues inférieurement [19]. Or, considérant, comme en (γ) ci-dessus, une suite (σ^n) de fonctions unité locales décroissant vers 1_Δ , on a,

---

[19] Voir le n° 1.6.

$$\int_\Omega N(x\ ,\ dy)(\sum_i \sigma_x^i(y)\ \xi_i)^2 = \sup_n \int_\Omega N(x\ ,\ dy)|y - x|^2 \frac{(\sum_i \sigma_x^i(y)\ \xi_i)^2}{|y - x|^2}(1 - \sigma^n(x\ ,\ y))\ ;$$

d'où ~~le résultat, puisque, en vertu du lemme 2.7,~~ pour chaque n , la fonction

$$x \longrightarrow \int_\Omega N(x\ ,\ dy)|y - x|^2 \frac{(\sum_i \sigma_x^i(y)\ \xi_i)^2}{|y - x|^2}(1 - \sigma^n(x\ ,\ y))$$

est continue sur Ω .

(φ) Le noyau singulier N est entièrement déterminé par A à cause de (1.9). De plus, si $A = P + S$, et si σ est une fonction unité locale, on vérifie immédiatement que la partie principale (a^{ij}) de P est donnée par la relation (1.10).

Enfin, si A satisfait au principe du maximum, reprenant la suite (θ_n) introduite au n° 2.8, alinéa (δ), on obtient (puisque P est normalisé par la condition $P1 = 0$), dès que n est assez grand,

$$\gamma(x) + \int_\Omega N(x\ ,\ dy)(1 - \sigma_x(y)) = A\theta_n(x) \leqslant 0 \quad ;$$

d'où le caractère borné de N , et le principe du maximum positif pour S . Le théorème 1.5 et ses corollaires 1, 2 et 3 sont ainsi complètement établis.

2.11. <u>Démonstration du corollaire 4 du théorème 1.5</u>. - D'après le théorème 1.5, si N est le noyau singulier d'un opérateur presque positif A appliquant $C_k^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$, N est de classe semi-continue (voir l'alinéa (γ) du n° 2.10).

Inversement, N étant un noyau singulier de classe semi-continue, on va construire un opérateur presque positif A appliquant $C_k^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$ admettant N comme noyau singulier.

Pour cela, on pose, pour chaque $f \in C_k^2(\Omega)$ et $x \in \Omega$,

$$A_1\ f(x) = \int_\Omega N(x\ ,\ dy)|y - x|^2\ \Delta_x\ f(y) = Sf(x) - \sum_{i,j} a_1^{ij}(x)\ D_i\ D_j\ f(x) \quad ,$$

où $Sf(x)$ est défini naturellement par (1.5) (n° 1.4), $\Delta_x f$ par (2.20) et (2.21) (n° 2.6) et où l'on a posé :

$$a_1^{ij}(x) = \frac{1}{2}\int_\Omega N(x\ ,\ dy)\ \sigma_x^i(y)\ \sigma_x^j(y)$$

(on notera que $a_1^{ij} \in B(\Omega)$ pour $1 \leqslant i\ ,\ j \leqslant n$).

En vertu du lemme 2.7 alinéa (v), $A_1\ f \in C(\Omega)$ pour tout $f \in C_k^2(\Omega)$. Par ailleurs, ainsi qu'on l'a vu au n° 2.10, alinéa (ε), pour chaque $\xi = (\xi_i) \in R^n$, la fonction $x \longrightarrow \sum_{i,j} a_1^{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j$ **est semi-continue inférieurement ; tout re-**vient donc à construire une matrice $[\tilde{a}^{ij}]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de fonctions continues sur Ω telle que

$$(2.38) \qquad \sum_{i,j} [\tilde{a}^{ij}(x) - a_1^{ij}(x)]\, \xi_i\, \xi_j \geqslant 0 \text{ , pour tout } x \in \Omega \text{ et } \xi \in R^n \quad ([20]).$$

Cette construction peut être faite comme suit : Soit (U_n) une suite d'ouverts contenus dans Ω telle que, pour tout n, $\overline{U_n}$ est compact et contenu dans U_{n+1}, et $\bigcup_n U_n = \Omega$. On pose

$$V_1 = U_2 \qquad \text{et} \qquad V_n = U_{n+1} \setminus \overline{U_{n-1}} \quad \text{pour tout } n \geqslant 2 \ ;$$

(V_n) est un recouvrement ouvert de Ω, localement fini, puisque V_n ne rencontre que V_{n-1} et V_{n+1} ; soit (φ_n) une partition de l'unité sur Ω subordonnée à ce recouvrement. On pose, par ailleurs,

$$\alpha_n = \sup_{\substack{x\in\overline{U_n} \\ |\xi|=1}} \sum_{i,j} a_1^{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \qquad (n \geqslant 1) \quad ([21]),$$

et

$$\tilde{q}(x\ ,\ \xi) = \sum_{n\geqslant 1} \alpha_{n+2}\, \varphi_n(x) |\xi|^2 \qquad (x \in \Omega\ ,\ \ \xi \in R^n) \ .$$

Si $x \in V_n$, et $|\xi| = 1$, on a

$$\tilde{q}(x\ ,\ \xi) = \alpha_{n+1}\, \varphi_{n-1}(x) + \alpha_{n+2}\, \varphi_n(x) + \alpha_{n+3}\, \varphi_{n+1}(x) \geqslant \alpha_{n+1}$$

$$\geqslant \sum_{i,j} a_1^{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \quad \text{par définition de } \alpha_{n+1} \ .$$

Il suffit alors de poser, pour $x \in \Omega$,

$$(2.39) \qquad \begin{cases} \tilde{a}^{ii}(x) = \sum_{n\geqslant 1} \alpha_{n+2}\, \varphi_n(x) & (1 \leqslant i \leqslant n) \ , \\ \text{et} & \\ \tilde{a}^{ij}(x) = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j \ , & \end{cases}$$

pour satisfaire la relation (2.38).

C. Q. F. D.

([20]) Voir le n° 1.6.

([21]) $\alpha_n < +\infty$ pour tout n, puisque $a_1^{ij} \in B(\Omega)$.

2.12. Invariance par difféomorphisme de la semi-continuité d'un noyau singulier ; démonstration du lemme 1.4.

(α) Avec les notations du lemme 1.4, si le noyau singulier N est de classe semi-continue, il en est de même du noyau $\tilde{N}$: En effet, soit A un opérateur presque positif sur Ω admettant N comme noyau singulier et appliquant $C_k^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$ (A existe d'après le corollaire 4 du théorème 1.5 établi ci-dessus au n° 2.11). Le transporté par Λ de A est un opérateur presque positif $\tilde{A}$ sur $\tilde{\Omega}$ admettant $\tilde{N}$ comme noyau singulier et appliquant $C_k^2(\tilde{\Omega})$ dans $C(\tilde{\Omega})$. Le théorème 1.5 entraîne alors que $\tilde{N}$ est aussi de classe semi-continue.

Il en résulte, $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \Phi$ étant continu comme γ , que $\tilde{S}$ est de classe semi-continue en même temps que S .

(β) Enfin, si S est de classe C^0 , il en est de même de $\tilde{S}$ par définition même. Le lemme 1.4 est ainsi complètement établi.

§ 3. Utilisation de la transformation de Fourier : Symbole d'un opérateur satisfaisant au principe du maximum positif.

3.1. - On rappelle d'abord la formule de représentation de Levy-Khinčin pour les fonctions de type négatif continues (voir [2], théorème 3) : Une fonction à valeurs complexes ψ sur R^n est dite de type négatif si :

(3.1) $$\psi(0) \text{ est réel et } \geqslant 0 ,$$

(3.2) $$\psi(-\xi) = \overline{\psi(\xi)} \qquad \text{pour tout } \xi \in R^n ,$$

(3.3) $$\sum_{j,k=1}^{p} \psi(\xi_j - \xi_k)\, \rho^j\, \overline{\rho^k} \leqslant 0$$

pour tout entier $p \geqslant 1$, toute suite $(\xi_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ de points de R^n , et toute suite $(\rho^j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ de nombres complexes telle que $\sum_{j=1}^{p} \rho^j = 0$.

Désignant alors par θ une fonction numérique continue sur R^n , à support compact et telle que $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ et $\theta(y) = 1$ pour y voisin de 0 , la propriété de représentation de Levy-Khinčin peut être énoncée comme suit :

Soit ψ une fonction à valeurs complexes sur R^n . Pour que ψ soit une fonction de type négatif continue, il faut et il suffit qu'elle soit de la forme :

(3.4) $$\psi(\xi) = c + i\langle \ell , \xi\rangle + q(\xi) - \int_{R^n} \mu(dy)[e^{i\langle y,\xi\rangle} - \theta(y)(1 + i\langle y , \xi\rangle)]$$

($\xi \in R^n$) [22], où μ est une mesure de Radon positive sur $R^n \setminus \{0\}$ telle que

$$(3.5) \qquad \int_{R^n\setminus\{0\}} \mu(dy)|y|^2\,\theta(y) < +\infty \quad \text{et} \quad \int_{R^n\setminus\{0\}} \mu(dy)(1-\theta(y)) < +\infty \quad [23],$$

c une constante réelle, $c \geqslant \int_{R^n\setminus\{0\}} \mu(dy)(1-\theta(y))$, ℓ un vecteur de R^n, et q une forme quadratique positive sur R^n :

$$q(\xi) = \sum_{j,k=1}^{n} a^{jk}\,\xi_j\,\xi_k \qquad (\xi \in R^n)\ , \quad a^{jk} = a^{kj} \ .$$

En outre, μ et q sont déterminées de façon unique par ψ (indépendamment du choix de θ), et aussi, une fois θ fixée, ℓ et $c = \psi(0) + \int_{R^n\setminus\{0\}} \mu(dy)(1-\theta(y))$.

On note, de plus, la majoration suivante, qui précise que lorsque $|\xi|$ tend vers l'infini, $\psi(\xi)$ ne croît pas plus vite que $|\xi|^2$:

$$(3.6) \qquad |\psi(\xi)| \leqslant c_1 + c_2|\xi| + c_3|\xi|^2 \qquad (\xi \in R^n) \ ,$$

où

$$c_1 = c + \int_{R^n\setminus\{0\}} \mu(dy)(1-\theta)) \ ,$$

$$c_2 = |\ell| \ ,$$

$$c_3 = \sup_{|\xi|=1} q(\xi) + \int_{R^n\setminus\{0\}} \mu(dy)|y|^2\,\theta(y) \ .$$

Cette relation résulte immédiatement de (3.4) et de la majoration

$$(3.7) \qquad |e^{i\langle y,\xi\rangle} - 1 - i\langle y\ ,\ \xi\rangle| \leqslant |y|^2\ |\xi|^2$$

que fournit la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à $e^{i\langle\cdot,\xi\rangle}$.

3.2. Un résultat local pour les opérateurs presque positifs. - On dira ici qu'une fonction complexe $\tilde{\psi}$ sur R^n est presque de type négatif, si elle est de la forme $\tilde{\psi}(\xi) = \alpha + \psi(\xi)$ $(\xi \in R^n)$ où α est une constante réelle et où ψ est de type négatif.

Ceci étant :

THÉORÈME 3.2. - Soit A une application linéaire presque positive de $C_k^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$ (n° 1.2). Si $\theta \in C_k^2(\Omega)$, on pose

---

[22] $\langle y\ ,\ \xi\rangle = \sum_{j=1}^{n} y_j\,\xi_j$ $(y \in R^n\ ,\ \xi \in R^n)$.

[23] L'intégrale du second membre de (3.4) est convergente en vertu de (3.5), compte tenu de (3.7) ci-dessous.

(3.8) $$a_\theta(x\,,\,\xi) = e^{-i\langle x,\xi\rangle}\,A(e^{i\langle\cdot,\xi\rangle}\,\theta)(x) \quad (^{24}) \qquad (x\in\Omega\,,\quad \xi\in R^n)\ .$$

La fonction a_θ **ainsi définie a les propriétés suivantes :**

(1) a_θ est continue sur $\Omega\times R^n$.

(2) Si $\theta\geqslant 0$ et si $x\in\Omega$ est tel que $\theta(y)=1$ au voisinage de x, la fonction $\xi \longrightarrow -a_\theta(x\,,\,\xi)$ est <u>presque de type négatif</u> et de classe C^∞ sur R^n.

(3) Pour chaque $f\in C_k^\infty(\Omega)$, et $x\in\Omega$,

(3.9) $$A(f\theta)(x) = (2\pi)^{-n}\int_{R^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\,a_\theta(x\,,\,\xi)\,\hat f(\xi)\,d\xi \quad (^{25}).$$

En effet, d'abord la continuité de a_θ résulte de celle de A (corollaire 1 du théorème 1.5) et de celle de l'application $\xi \longrightarrow e^{i\langle\cdot,\xi\rangle}\,\theta$ de R^n dans $C_k^\infty(\Omega)$ (muni, par exemple, de la topologie induite par $C_k^2(\Omega)$).

Supposant ensuite que $\theta\geqslant 0$ et $\theta(y)=1$ au voisinage de x, et utilisant la décomposition (1.8) (n° 1.5) de A, on obtient :

(3.10) $$\begin{cases} a_\theta(x\,,\,\xi) = -\sum\limits_{j,k} a^{jk}(x)\,\xi_j\,\xi_k + i\sum\limits_{j=1}^{n} b^j(x)\,\xi_j + \gamma(x) \\ \qquad\qquad + \int_\Omega N(x\,,\,dy)\,\sigma_x(y)(e^{i\langle y-x,\xi\rangle} - 1 - i\langle y-x\,,\,\xi\rangle) \\ \qquad\qquad\qquad + \int_\Omega N(x\,,\,dy)(\theta(y)-\sigma_x(y))\,e^{i\langle y-x,\xi\rangle} \end{cases} ;$$

d'où le fait que $\xi \longrightarrow -a_\theta(x\,,\,\xi)$ est presque de type négatif, compte tenu de la formule de Levy-Khinčin rappelée au n° 3.1 (en choisissant σ de telle sorte que $\theta-\sigma_x\geqslant 0$) ; le fait que cette fonction est de classe C^∞ résultant, compte tenu de la continuité de A, de ce que l'application $\xi \longrightarrow e^{i\langle\cdot,\xi\rangle}\,\theta$ à valeurs dans $C_k^2(\Omega)$ est de classe C^∞.

Enfin, pour établir (3.9), on écrit la formule de réciprocité de la transformation de Fourier :

$$f(x) = (2\pi)^{-n}\int_{R^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\,\hat f(\xi)\,d\xi \quad ;$$

d'où

(3.11) $$f\theta = (2\pi)^{-n}\int_{R^n}\hat f(\xi)\,e^{i\langle\cdot,\xi\rangle}\,\theta\,d\xi \quad ,$$

---

(24) On prolonge canoniquement A aux fonctions à valeurs complexes : $A(f+ig) = Af + iAg$.

(25) $\hat f$ désigne la transformée de Fourier de la fonction de $C_k^\infty(R^n)$ prolongeant f par 0 hors de Ω : $$\hat f(\xi) = \int_{R^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\,f(x)\,dx \quad (\xi\in R^n)\ .$$

en interprétant l'intégrale du second membre comme intégrale de la fonction continue $\xi \longrightarrow \hat{f}(\xi)\, e^{i\langle \cdot, \xi \rangle}\, \theta$ à valeurs dans un sous-ensemble convexe borné (donc compact) de l'espace de Montel $C_k^\infty(\Omega)$ (muni de sa topologie canonique). On obtient alors (3.9) en appliquant A aux deux membres de (3.11), puisque, A étant continu, on peut le faire opérer sous le signe d'intégration au second membre.

C. Q. F. D.

3.3. Prolongement aux fonctions bornées d'un opérateur presque positif dont le noyau singulier est borné à l'infini. - Désignant ici par $C_b^2(\Omega)$ l'espace des fonctions complexes sur Ω de classe C^2 et bornées, et par $B_c(\Omega)$ l'espace des fonctions complexes boréliennes sur Ω , on a le lemme suivant :

LEMME. - Soit A un opérateur presque positif de $C_k^2(\Omega)$ dans $B(\Omega)$ (n° 1.2) dont le noyau singulier (n° 1.5) est borné à l'infini (n° 1.4).

Il existe un prolongement de A , et un seul, en une application linéaire (encore notée A) de $C_b^2(\Omega)$ dans $B_c(\Omega)$ telle que,

$$Af(x) = \lim_{n\to\infty} A(f\theta_n)(x) \tag{3.12}$$

pour tout $f \in C_b^2(\Omega)$, tout $x \in \Omega$, et toute suite (θ_n) croissant vers 1 de fonctions de $C_k^2(\Omega)$ telle que, pour tout compact K de Ω , il existe un entier n pour lequel

$$1_K \leqslant \theta_n \leqslant 1 \quad .$$

De plus, pour $f \in C_b^2(\Omega)$ et $x \in \Omega$, $Af(x)$ est encore donné par la relation (1.8) (n° 1.5).

En effet, dans la décomposition (1.8) (n° 1.5) de A , on constate que le second membre garde un sens si on substitue à f une fonction de $C_b^2(\Omega)$, et que le prolongement ainsi défini répond à la question.

On notera que, si f n'est pas à support compact, Af peut ne pas être continue, ainsi que le montre l'exemple suivant : On pose $\Omega = R$,

$$N(x\ ,\ .) = \varepsilon_{1/x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} \neq x \ , \quad N(-1\ ,\ .) = N(1\ ,\ .) = N(0\ ,\ .) = 0 \quad ,$$

et

$$Af(x) = -\,1_{\{0\}}(x)\, f(x) + \int_R N(x\ ,\ dy)(f(y) - f(x)) \qquad (x \in R\ ,\ \ f \in C_k^2(R)) \quad .$$

A applique $C_k^2(R)$ dans $C(R)$ et satisfait au principe du maximum positif ; mais la fonction $A1 = 1_{\{0\}}$ n'est pas continue !

Remarque. - Contrairement à l'apparence, cet exemple ne contredit pas l'alinéa (2) du théorème 1.4 qui affirme que le coefficient γ doit être continu si S applique $C_k^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$: En effet, introduisant une fonction unité locale σ , A s'écrit :

$$Af(x) = [1_{R\setminus\{0\}}(x)\ \sigma(x\ ,\ \frac{1}{x}) - 1]f(x) + \int_R N(x\ ;\ dy)(f(y) - \sigma_x(y)\ f(x)) \quad ,$$

où $\gamma(x) = 1_{R\setminus\{0\}}(x)\ \sigma(x\ ,\ \frac{1}{x}) - 1$ est fonction continue de x !

3.4. Représentation d'un opérateur satisfaisant au principe du maximum au moyen de son symbole.

THÉORÈME 3.4. - Soit A une application linéaire de $C_k^\infty(\Omega)$ dans $C(\Omega)$ satisfaisant au principe du maximum positif (n° 1.2). On pose :

$$a(x\ ,\ \xi) = e^{-i\langle x,\xi\rangle}\ A(e^{i\langle\cdot,\xi\rangle})(x) \quad (^{26}) \qquad (x \in \Omega\ ,\ \ \xi \in R^n)\ . \tag{3.13}$$

Alors :

(1) Pour chaque $x \in \Omega$, la fonction $\xi \longrightarrow - a(x\ ,\ \xi)$ est continue et de type négatif sur R^n .

(2) Il existe une fonction h positive et localement bornée sur Ω telle que

$$|a(x\ ,\ \xi)| \leqslant h(x)|\xi|^2 \qquad (x \in \Omega\ ,\ \ \xi \in R^n)\ . \tag{3.14}$$

(3) Pour chaque $x \in \Omega$ et chaque $f \in C_k^\infty(\Omega)$,

$$Af(x) = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\ a(x\ ,\ \xi)\ \hat{f}(\xi)\ d\xi \quad (^{27}). \tag{3.15}$$

COROLLAIRE 1. - Pour chaque $x \in \Omega$ et chaque $\xi \in R^n$, on a

$$\begin{cases} a(x\ ,\ \xi) = - \sum_{j,k=1}^{n} a^{jk}(x)\ \xi_j\ \xi_k + i \sum_{j=1}^{n} b^j(x)\ \xi_j + \gamma(x) \\ \qquad + \int_\Omega N(x\ ,\ dy)[e^{i\langle y-x,\xi\rangle} - \sigma_x(y)(1 + i\langle y - x\ ,\ \xi\rangle)]\ , \end{cases} \tag{3.16}$$

où a^{jk} , b^j , γ et N sont les termes intervenant dans la décomposition de A par la formule (1.8) (n° 1.5) relativement à la fonction unité locale σ , avec, en particulier,

$$\gamma(x) + \int_\Omega N(x\ ,\ dy)(1 - \sigma_x(y)) \leqslant 0 \quad . \tag{3.17}$$

---

(26) En utilisant le prolongement introduit au n° 3.3.

(27) Cette intégrale a un sens en vertu de la propriété (2).

COROLLAIRE 2. - Inversement, si on donne des fonctions continues a^{jk} $(1 \leqslant j\ , k \leqslant n)$, b^j $(1 \leqslant j \leqslant n)$, et γ , et un noyau singulier N de classe C^0 sur Ω , borné à l'infini de telle sorte que, pour chaque $x \in \Omega$, la matrice $[a^{jk}(x)]$ soit symétrique et positive, et que soit vérifiée la relation (3.17), alors, si la fonction a sur $\Omega \times R^n$ est définie par (3.16), la relation (3.15) définit une application linéaire de $C_k^\infty(\Omega)$ dans $C(\Omega)$ satisfaisant au principe du maximum positif.

La fonction a , associée à A par la relation (3.16), est le symbole de A ([28]). La connaissance de son symbole détermine entièrement A en vertu de (3.15).

Tout d'abord, le corollaire 1 résulte immédiatement du lemme 3.3 et de la définition de a . On en déduit, en vertu de la formule de Levy-Khinčin rappelée au n° 3.1, la propriété (1) du théorème.

Se pourvoyant ensuite d'une suite (θ_n) ayant les propriétés requises dans le lemme 3.3, on a, pour tout $x \in \Omega$ et $\xi \in R^n$,

$$a(x\ ,\ \xi) = e^{-i\langle x,\xi\rangle} \lim_{n\to\infty} A(e^{i\langle \cdot,\xi\rangle}\ \theta_n)(x) = \lim_{n\to\infty} a_{\theta_n}(x\ ,\ \xi)$$

d'après ce lemme et le caractère borné à l'infini du noyau singulier de A (n° 1.5).

De plus, la majoration (3.6) ainsi que (3.17) assurent l'existence d'une fonction positive $x \longrightarrow h(x)$ sur Ω , localement bornée telle que, pour tout n et tout x , ξ :

$$|a_{\theta_n}(x\ ,\ \xi)| \leqslant h(x)|\xi|^2\ . \tag{3.18}$$

On en déduit la propriété (2), puis la propriété (3), en passant à la limite grâce au théorème de Lebesgue dans (3.9) écrite pour $\theta = \theta_n$. D'où le théorème et son corollaire 1. Le corollaire 2 s'en déduit immédiatement, en associant par la relation (1.8) aux données un opérateur A auquel on applique le théorème 3.4 et le corollaire 1.

C. Q. F. D.

3.5. Cas d'un symbole continu. - Ainsi que le montre l'exemple du n° 3.3, le symbole de A n'est pas nécessairement une fonction continue de x . Toutefois, inversement :

([28]) Voir à ce sujet l'article de HÖRMANDER [4], et les travaux sur les opérateurs pseudo-différentiels qui y sont cités.

THÉORÈME 3.5. - Soit $a : (x, \xi) \longrightarrow a(x, \xi)$ **une fonction complexe définie** sur $\Omega \times R^n$ et telle que :

(α) pour chaque $x \in \Omega$, la fonction $\xi \longrightarrow -a(x, \xi)$ est de <u>type négatif</u> sur R^n (n° 3.1) ;

($\alpha\alpha$) a est continue sur $\Omega \times R^n$ (29).

Alors, si on pose, pour $f \in C_k^\infty(\Omega)$ et $x \in \Omega$,

$$Af(x) = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} e^{i\langle x,\xi\rangle} a(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi \quad , \tag{3.15}$$

on définit une application linéaire de $C_k^\infty(\Omega)$ dans $C(\Omega)$ satisfaisant au principe du maximum positif.

On peut établir ce résultat comme suit : Fixant d'abord un point x de Ω, on associe à a, par la formule de Levy-Khinčin (n° 3.1), des termes $a^{jk}(x)$, $b^j(x)$, $\gamma(x)$ et $N(x, .)$ de telle sorte que $a(x, .)$ s'exprime par la relation (3.16). A ces termes, on associe une forme linéaire A_x sur $C_k^2(\Omega)$ par la relation (30) :

$$\langle A_x , f\rangle = \sum_{k,\ell=1}^n a^{k\ell}(x) D_k D_\ell f(x) + \sum_{j=1}^n b^j(x) D_j f(x) + \gamma(x) f(x)$$
$$+ \int_\Omega N(x, dy)[f(y) - \sigma_x(y)(f(x) + \sum_{j=1}^n D_j f(x)(y^j - x^j))] \quad .$$

La forme linéaire A_x ainsi définie satisfait au principe du maximum positif "au point x", donc, en vertu de la remarque figurant à la fin du n° 2.2, A_x est continue sur $C_k^2(\Omega)$; et le raisonnement fait ci-dessus aux n° 3.2 et 3.4, qui a conduit à la relation (3.15), fournit la relation :

$$\langle A_x , f\rangle = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} e^{i\langle x,\xi\rangle} a(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi \qquad (f \in C_k^2(\Omega)) \quad . \tag{3.19}$$

Autrement dit, A étant défini par (3.15), $\langle A_x , f\rangle = Af(x)$ pour tout $f \in C_k^2(\Omega)$ et tout $x \in \Omega$. Ainsi, tenant compte aussi de l'hypothèse ($\alpha\alpha$) sur a, on voit que A applique $C_k^\infty(\Omega)$ dans $C(\Omega)$ et satisfait au principe du maximum positif.

C. Q. F. D.

---

(29) Il existe alors une fonction h positive et localement bornée sur Ω telle que, $|a(x, \xi)| \leqslant h(x)|\xi|^2$ $(x \in \Omega , \xi \in R^n)$; voir le corollaire de la proposition 4 de l'exposé 2 du Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 3e année, 1964.

(30) calquée sur (1.8) (n° 1.5).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AISENSTAT (N.). - Un type d'opérateurs homogènes, Ucenye Zapiski, Moskv. Mat., t. 15, 1939, p. 35-112 ([31]).

[2] COURRÈGE (P.). - Générateur infinitésimal d'un semi-groupe de convolution sur R^n et formule de Levy-Khinčin, Bull. Sc. math., 2e série, t. 88, 1964, p. 3-30.

[3] FELLER (W.). - The general diffusion operator and positivity preserving semi-groups in one dimension, Annals of Math., t. 60, 1954, p. 417-436.

[4] HÖRMANDER (L.). - Pseudo-differential operators, Comm. pure and appl. Math., t. 18, 1965, p. 501-517.

[5] NEVEU (J.). - Sur une hypothèse de Feller à propos de l'équation de Kolmogorov, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 240, 1955, p. 590-591.

[6] NEVEU (J.). - Semi-groupes généralisés et processus de Markov, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 240, 1955, p. 1046-1047.

[7] Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 5e année, 1960/61. - Paris, Secrétariat mathématique, 1961.

[8] Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 10e année, 1965/66. - Paris, Secrétariat mathématique, 1967.

[9] TAUTZ (L.). - Zum Umkehrungsproblem bei elliptischen Differentialgleichungen, Archiv der Math., t. 3, 1952, p. 232-250.

[10] von WALDENFELS (W.). - Positive Halbgruppen auf einem n-dimensionalen Torus, Archiv der Math., t. 15, 1964, p. 191-203.

[11] von WALDENFELS (W.). - Fast positive Operatoren, Berichte der Kernforschungsanlage Jülich, 1964.

([31]) Ce texte peut être consulté à la Bibliothèque Nationale, à Paris.