Generalización de la medida del cuerpo de Levi-Civita

Sebastián Troncoso Naranjo.

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad

Católica de Chile para optar al grado académico de

Magíster en Matemática.

Profesor Guía: María Herminia Ochsenius Alarcón.

Junio 2011.
Santiago, Chile.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE.

FACULTAD DE MATEMÁTICAS.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA.

Título de tesis: Generalización de la medida del cuerpo de Levi-Civita.

Autor: Sebastián Troncoso Naranjo.

Fecha: Junio 2011.

Santiago, Chile.

Jurado Interno:

Olivier Bourget.
Departamento de Matemática.
Pontificia Universidad Católica de Chile.

Profesor Guía 1:

María Herminia Ochsenius Alarcón.
Departamento de Matemática.
Pontificia Universidad Católica de Chile.

Profesor Externo:

Hans Keller Zullig.
University of Luzern, Switzerland.
(Profesor retirado)

1. Introducción

El cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$, central en el quehacer matemático, posee características importantes bien conocidas. Es un cuerpo ordenado arquimedianamente, real cerrado, completo por sucesiones de Cauchy, así como por cortaduras de Dedekind.

Su contraparte en el mundo no-arquimediano es el cuerpo Levi-Civita real $\mathcal{R}$. También es ordenado, real cerrado y completo por sucesiones de Cauchy. Pero, por tener un orden no arquimediano, no es completo en el sentido de Dedekind. Sin embargo contiene a $(\mathbb{R}, \leq)$ como subcuerpo, y es la menor extensión de $\mathbb{R}$ que preserva las propiedades anteriores.

Las investigaciones de M. Berz y K. Shamseddine han puesto de relieve semejanzas básicas así como diferencias notables entre estos dos cuerpos. En particular se ha desarrollado una medida de tipo Lebesgue, trabajo difícil por la existencia de subconjuntos de $\mathcal{R}$ que siendo acotados no poseen ínfimos, o supremos.

El tema central de esta Tesis es la generalización de esta medida en $\mathcal{R}$ a los espacios $\mathcal{R}^d$, de dimensión finita. Con ello se puede estudiar problemas geométricos, y de hecho un problema de P. Erdös fue la motivación inicial, (ver el anexo 2). En el capítulo 1 daremos la definición formal de $\mathcal{R}$ y sus operaciones para luego probar que efectivamente es un cuerpo que extiende a $\mathbb{R}$. Luego nos referiremos al orden que lo transforma en un cuerpo ordenado de forma no arquimediana.(Para mayor información sobre cuerpos ordenados y cuerpos reales cerrados se puede ver [3] , [5]).

$\mathcal{R}$ con este orden posee una topología que interactúa de buena manera con las operaciones del cuerpo, convirtiéndolo en un cuerpo completo por sucesiones de Cauchy y permitiendo que las series convergan si y solo si su termino general converge a cero,(ver [2]). El capítulo 2 generaliza la medida en $\mathcal{R}$ introducida por Khodr Shamseddine and Martin Berz en [6] a una medida en $\mathcal{R}^n$, basandose en las ideas de contenido de Jordan(ver [4]).

Aunque escapa al tema de esta Tesis hay preguntas algebraicas que resulta natural formularse en esta teoría. Un breve anexo (anexo 1) trata sobre extensiones de cuerpos en $\mathcal{R}$ y deja una pregunta abierta. El último anexo muestra como la teoría desarrollada en el capítulo 2 podría llevar a una generalización de la solución de Danzer y Grünbaum no solo al caso del cuerpo $\mathcal{R}$ sino que a cualquiera de los que hemos llamado minimalmente arquimedianos.

2. El cuerpo de Levi-Civita

En el presente capítulo se introducirá brevemente el cuerpo Levi-Civita, más información se puede encontrar en [2] y [7].

Definición 2.1. Llamaremos *finito izquierdo* a un subconjunto M de los números racionales $\mathbb{Q}$ si para todo $r \in \mathbb{Q}$ existe sólo un número finito de elementos de M menores que r

Observación 2.1. *Los conjuntos finito izquierdo son cerrados bajo las operaciones de Intersección, Unión, Subconjuntos y Suma.*

Definición 2.2. El conjunto $\mathcal{R}$, se define por

$$\mathcal{R} = \{ f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} : supp(f) \text{ es finito izquierdo } \}$$

Lo llamaremos Levi-Civita o Levi-Civita Real.

En la siguiente definición se han resumido las notaciones estándar para Levi-Civita

Definición 2.3.

a) Definimos $\lambda : \mathcal{R} \to \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ por
$\lambda(0) = \infty$
$\lambda(x) = min(supp(x))$ para $x \neq 0$

b) Sea $q \in \mathbb{Q}$ dado, definimos $x[q]$ como el valor de x en q.

c) Para $x, y \in \mathcal{R}$ y $q \in \mathbb{Q}$ escribimos $x =_q y$ si
$\forall r \in \mathbb{Q}\ r \leq q\ x[r] = y[r]$

Definición 2.4. Definimos las operaciones suma y multiplicación en $\mathcal{R}$ como sigue:

$$(x + y)[q] = x[q] + y[q]$$

$$(x \cdot y)[q] = \sum_{q_x + q_y = q} x[q_x] \cdot y[q_y]$$

Observación 2.2. *Sea $x \in \mathbb{R}$ Definimos*

$$\Pi_x[q] = \begin{cases} x & si\ q = 0 \\ 0 & si\ no. \end{cases}$$

Es claro que $\Pi_x \in \mathcal{R}$ y que Π_x induce una inscrustación de $\mathbb{R}$ a $\mathcal{R}$. Además,

1. $\Pi_x + \Pi_y = \Pi_{x+y}$
2. $\Pi_x \cdot \Pi_y = \Pi_{x \cdot y}$
3. *Esta incrustación claramente no es sobreyectiva.*
4. *$\mathcal{R}$ es una extensión de los números reales.*

Lema 2.1. *Sean $x, y \in \mathcal{R}, c \in \mathbb{R}$ entonces*

$$\lambda(x \cdot y) = \lambda(x) + \lambda(y)$$

$$\lambda(x + y) \geq \text{mín}(\lambda(x), \lambda(y))$$

$$\lambda(cx) = \lambda(\Pi_c x) = \lambda(x)$$

Observación 2.3. *Es fácil ver que $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad $\mathbf{1} = \Pi_1$.*

Entonces, para establecer que $\mathcal{R}$ es un cuerpo basta ver que cada elemento no cero posee un inverso multiplicativo. Para ello, necesitaremos el siguiente teorema.

Teorema 2.1 (Teorema del punto fijo)**.** *Sea $q_M \in \mathbb{Q}$, $M \subset \mathcal{R}$ el conjunto de todos los elementos, $x \in \mathcal{R}$ tales que $\lambda(x) \geq q_M$, y $f : M \to \mathcal{R}$ tal que $f(M) \subset M$.*
Si existe $k \in \mathbb{Q}$, $k > 0$ tal que

$$\forall x_1, x_2 \in M \;\; x_1 =_q x_2 \Rightarrow f(x_1) =_{q+k} f(x_2)$$

entonces existe un único $x \in M$ tal que

$$x = f(x)$$

Demostración:
Sea $a_0 \in M$ fijo, definimos la sucesión

$$a_i = f(a_{i-1}) \text{ con } i \in \mathbb{N}$$

Como $f(M) \subsetneqq M$ para todo i, $\lambda(a_i) \geq q_M$.
Notemos que

$$a_i[p] = a_{i-1}[p] \text{ para } p < (i-1)k + q_M. \tag{2.1}$$

En efecto para $a_o, a_1 \in M$ tenemos que $a_1[p] = 0 = a_0[p]$ con lo que la ecuación 2.1 es verdad para $i = 1$, y la hipótesis del teorema garantiza el paso inductivo.
Ahora consideramos la función

$$\begin{array}{cccc} x & : & \mathbb{Q} & \to & \mathbb{R} \\ & & q & \mapsto & a_i[q] \end{array} .$$

donde i cumple que $(i-1)k + q_M > q$.
Esta función está bien definida por la elección de la sucesión.
Por otro lado, (abusando de la notación $=_q$)

$$x =_q a_i$$

lo que implica que $x \in \mathcal{R}$. Más aún, como $a_i \in M$ entonces $x \in M$.
Por último, sea $q \in \mathbb{Q}$ tomamos $i \in \mathbb{N}$ tal que $(i-1)k + q_M > q$ entonces

$$x =_q a_i =_q a_{i+1}$$

$$f(x) =_{q+k} f(a_i)$$

Con lo que, para todo $r \leq q$

$$x[r] = a_{i+1}[r] = f(a_i)[r] = f(x)[r]$$

Por lo tanto, $f(x) =_q x$. Como q es arbitrario obtenemos que $f(x) = x$.

Ahora veremos la unicidad.
Sea y un punto fijo, notemos que $x_1 =_q x_2 \Rightarrow f(x_1) =_{q+k} f(x_2)$ es equivalente a:

$$\lambda(f(x_1) - f(x_2)) \geq \lambda(x_1 - x_2) + k$$

Por lo que

$$\lambda(x - y) = \lambda(f(x) - f(y)) \geq \lambda(x - y) + k$$

$$\therefore x = y$$

■

Antes de demostrar que $\mathcal{R}$ es un cuerpo debemos introducir un elemento, la unidad infinitesimal, que será fundamental en el estudio de $\mathcal{R}$.

Definición 2.5. Denotaremos la *unidad infinitesimal*, d , como sigue:

$$d[q] = \begin{cases} 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{en todo otro caso} \end{cases}$$

Entonces

$$d^n[q] = \begin{cases} 1 & \text{si } q = n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Lema 2.2. *El número d es invertible y admite raíces enésimas en $\mathcal{R}$.*

Demostración:
Los elementos, d^{-1} y $d^{\frac{1}{n}}$, definidos como sigue, satisfacen lo pedido.

$$d^{-1}[q] = \begin{cases} 1 & \text{si } q = -1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$d^{\frac{1}{n}}[q] = \begin{cases} 1 & \text{si } q = \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

■

Teorema 2.2. *($\mathcal{R}$,+,·) es cuerpo*

Demostración:
Ya sabemos que $\mathcal{R}$ es un anillo conmutativo con unidad. Sólo nos queda ver que todo elemento posee un inverso multiplicativo.
Sean $z \in \mathcal{R}, q = \lambda(z), a = z[q], z^* = \frac{1}{a}d^{-q}z$. Entonces $\lambda(z^*) = 0$ y $z^*[0] = 1$.
Por lo tanto, basta probar que z^* posee inverso multiplicativo.
Sin perder generalidad suponemos, entonces, que $\lambda(z) = 0$ y $z[0] = 1$.
$z = 1$ es su propio inverso. Si $z \neq 1$ entonces z se puede escribir de la forma $z = 1 + y$ donde $0 < k = \lambda(y) < \infty$.
Si logramos probar que existe un $x \in \mathcal{R}$ tal que

$$(1 + x)(1 + y) = 1$$

probaríamos lo buscado. La última ecuación es equivalente a

$$x = -yx - y$$

Consideremos la función $f(x) = -yx - y$, nuestro problema se reduce a encontrar un punto fijo de la función f.
Definimos el conjunto, M como sigue

$$M = \{x \in \mathcal{R} : \lambda(x) \geq k\}$$

entonces $f(M) \subset M$, ya que si $x \in M$ entonces

$$\lambda(f(x)) = \lambda(y) + \lambda(-(x+1)) \geq 2k \geq k$$

Sea $x_1, x_2 \in M$ tal que $x_1 =_q x_2$. Como el mínimo del soporte de y es k, tenemos que $yx_1 =_{q+k} yx_2$. Por lo tanto

$$-yx_1 - y =_{q+k} -yx_2 - y$$

entonces f satisface la hipótesis del lema 3.1.
Por tanto f posee un punto fijo.

■

La existencia de raíces enésimas de elementos de $\mathcal{R}$ sigue las mismas reglas que en el caso de $\mathbb{R}$.

Teorema 2.3. *Sea $z \in \mathcal{R}$,distinto de cero, y sea $q = \lambda(z)$. Si $n \in \mathbb{N}$ es par y $z[q]$ es positivo, z tiene dos raíces enésimas en $\mathcal{R}$. Si n es par y $z[q]$ es negativo, z no tiene raíces enésimas en $\mathcal{R}$. Si n es impar, z tiene una única raíz enésima en $\mathcal{R}$.*

Demostración:
Sea $z \neq 0$ entonces podemos escribir $z = ad^q z^\star$ donde $a = z[q], q = \lambda(z)$.
Por otro lado $z^\star = 1 + y$ donde $\lambda(y) > 0$. Con lo que $z = ad^q(1+y)$
Si w es una raíz enésima de z entonces como $q = \lambda(z) = \lambda(w^n) = n\lambda(w)$, podemos escribir w como sigue: $w = bd^{\frac{q}{n}}(1+x)$ donde
$b \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{R}, \lambda(x) > 0$.
Luego la afirmación del teorema es equivalente a que el sistema de ecuaciones $b^n = a$ y $(1+x)^n = 1+y$ posea solución.
Primero notemos que la primera ecuación es de números reales por lo que posee:
− dos soluciones si n es par y $a = z[q]$ positivo,
− ninguna solución si n es par y $a = z[q]$ negativo,
− solución única si n es impar.
Solo tenemos que probar que la ecuación $(1+x)^n = 1+y$ posee solución única en $\mathcal{R}$ cuando $\lambda(y) > 0$. Para esto notemos primero que la ecuación es equivalente a

$$nx + x^2 P(x) = y$$

donde $P(x)$ es un polinomio con coeficientes naturales.
Reescribiremos la ecuación como un problema de punto fijo. Consideremos la función

$$f(x) = \frac{y}{n} - x^2 \frac{P(x)}{n}$$

y el conjunto

$$M = \{x \in \mathcal{R} : \lambda(x) \geq \lambda(y) = k_y\}$$

Primero notemos que si x es un punto fijo, con $\lambda(x) > 0$ entonces $x \in M$.
En efecto, como $\lambda(x) > 0$ entonces $\lambda(P(x)) \geq 0$.Entonces

$$\lambda(x^2 P(x)) > \lambda(x) > \lambda(n \cdot 1) = 0$$

Luego $\lambda(n \cdot 1 + xP(x)) = 0$ y

$$\lambda(y) = \lambda(nx + x^2 P(x)) = \lambda(x(n \cdot 1 + xP(x))) = \lambda(x) + \lambda(n \cdot 1 + xP(x)) = \lambda(x)$$

Por lo que $\lambda(x) = \lambda(y)$ por lo que $x \in M$.
Ahora veamos que $f(M) \subset M$. Sea $x \in M$ entonces $\lambda(x^2 P(x)) \geq 1k_y \geq k_y$.
Por ello $f(x) = \frac{y}{n} - x^2 \frac{P(x)}{n}$, por el mismo argumento anterior, tiene como mínimo de su soporte a k_y. Eso prueba que $f(x) \in M$.
Por último, sean $x_1, x_2 \in M$ tal que $x_1 =_q x_2$ entonces
$\lambda(x_1) \geq k_y$ y $\lambda(x_2) \geq k_y$. Ocupando la definición de multiplicación y que $k_y \leq q$ notamos que si $r \in \mathbb{Q}, \quad r \leq q + k_y$.

$$x_1^2[r] = \sum_{q_x + q_y = r} x_1[q_x] x_1[q_y] = \sum_{q_x + q_y = r} x_2[q_x] x_2[q_y] = x_2^2$$

$$x_1^2 =_{q+k_y} x_2^2$$

Más aún, inductivamente podemos probar que, para todo $m \in \mathbb{N}$ se tiene $x_1^m =_{q+k_y} x_2^m$. En particular tenemos que

$$x_1^2 P(x_1) =_{q+k_y} x_2^2 P(x_2)$$

Por lo que

$$f(x_1) =_{q+k_y} f(x_2)$$

Ya que M y f cumplen las hipótesis del teorema del punto fijo, existe un único punto $x \in M$ tal que $f(x) = x$. Notemos que como x es un elemento de M tenemos que $\lambda(x) > 0$

■

Definiremos ahora un orden no arquimediano en $\mathcal{R}$.

Definición 2.6. Para $x, y \in \mathcal{R}$ decimos que $x > y \Leftrightarrow x - y \in \mathcal{R}^+$, donde $\mathcal{R}^+$ está definido como sigue:

$$x \in \mathcal{R}^+ \Leftrightarrow x[\lambda(x)] > 0$$

Observación 2.4. *Es claro que $\mathcal{R}^+$ define un cono positivo en $\mathcal{R}$. Por tanto $\mathcal{R}$ es un cuerpo ordenado.*

Definición 2.7. Decimos que a es *infinitamente más pequeño* que b, $a << b$ si

$$\forall n \in \mathbb{N} : an < b.$$

Si $a << b$ escribimos también $b >> a$. Y la negación de $a << b$ se anotará por $a \not\ll b$.

Observación 2.5. *Si* $k \in \mathbb{N}$

1. $d^k << 1$
2. $1 << d^{-k}$

Por tanto $\mathcal{R}$ *es un cuerpo con un orden no arquimediano.*

Observación 2.6. *Sean* $x < y \in \mathbb{R}$*, entonces la incrustación* Π *también cumple que* $\Pi_x < \Pi_y$

Definición 2.8. Sea $x(x_1, .., x_d) \in \mathcal{R}^d$ definimos

$$|x| = \sqrt{(x_1^2 + ... + x_d^2)}$$

Definición 2.9. Sea M subconjunto de $\mathcal{R}$ o $\mathcal{R}^d$ decimos que M es abierto si para todo $x_o \in M$ existe un $\epsilon > 0$; $\epsilon \in \mathcal{R}$ tal que el conjunto , $O(x_0, \epsilon)$ de puntos x con $|x - x_0| < \epsilon$, es un subconjunto de M.

Estas bolas forman una base de una topología, que llamamos la topología del orden.

Lema 2.3. *Consideremos* $\mathcal{R}$ *o* $\mathcal{R}^d$ *con la topología del orden descrita arriba,entonces estos espacios son Hausdorff , de base no numerable e inducen la topología discreta en los números reales. Además, el espacio* $\mathcal{R}$ *es disconexo y no localmente compacto.*

Demostración:
Es claro que todas las bolas abiertas y todo el espacio son conjuntos abiertos. También que la unión e intersecciones finitas de abiertos es abierto.
Ahora los conjuntos $M_1 = \{x \in \mathcal{R} : \ (x \leq 0) \ \vee \ (x > 0 \wedge x << 1)\}$ y $M_2 = \{x \in \mathcal{R} : \ (x > 0) \wedge \ (x \not\ll 1)\}$ son disjuntos y abiertos. Además, $\mathcal{R} = M_1 \cup M_2$, por lo que $\mathcal{R}$ no es conexo.
Sean x, y elementos diferentes entonces $O(x, \frac{|x-y|}{2})$ y $O(y, \frac{|x-y|}{2})$ son abiertos disjuntos que contienen a x e y respectivamente. Por lo tanto, $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^d$ son espacios de Hausdorff.
Para probar que no existe una base numerable de esta topología, consideremos la colección de abiertos $M_x = O(\Pi_x, d)$ donde $x \in \mathbb{R}$ (o bien $x \in \mathbb{R}^n$). Esta es una colección no numerable de abiertos disjuntos dos a dos. Esto también prueba que la topología inducida en los reales es la topología discreta (ya que $M_x \cap \mathbb{R} = \{x\}$ o $M_x \cap \mathbb{R}^n = \{x\}$).
Para ello consideremos $x \in \mathcal{R}$ y una vecindad abierta, U, de x. Sea $\epsilon > 0$ tal que $O(x, \epsilon) \subset U$. Demostremos que la clausura de U no es compacta.
Definimos los conjuntos M_i como sigue:

$$M_{-1} = \{y \in \mathcal{R} : y - x >> d\epsilon\} \cup \{y \in \mathcal{R} : y < x\}$$

Para $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$M_i = (x + (i-1)d\epsilon, x + (i+1)d\epsilon)$$

Entonces estos conjuntos cubren a $\mathcal{R}$ y en particular son un cubrimiento de la clausura de U.
Si $y < x$ tenemos que $y \in M_{-1}$.
Si $y = x$ entonces $y \in M_0$.
Si $y > x$ y $y - x << d\epsilon$ entonces $y \in M_1$.
Si $y > x$ y $y - x >> d\epsilon$ entonces $y \in M_{-1}$.
En cualquier otro caso, y está contenido en un algún M_i para algún $i \in \mathbb{N}$.
Es claro que los conjuntos M_i para $i = -1, 0, 1, 2, ...$ son abiertos.
Por último, notemos que no podemos tomar un subcubrimiento finito ya que para cada i el número $x + id\epsilon \in U$ está contenido únicamente en el conjunto M_i.

■

En lo que sigue de esta sección probaremos que $\mathcal{R}$ es Cauchy completo.

Definición 2.10. Decimos que la sucesión (a_n) *converge fuertemente* si existe $a \in \mathcal{R}$ tal que

$$\forall \epsilon \in \mathcal{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : \forall m > n \quad |a - a_m| < \epsilon.$$

En ese caso decimos que (a_n) converge (fuertemente) al elemento a y anotamos

$$a_n \to 0, \text{cuando } n \to \infty$$

Observación 2.7. *Conservando la notación de la definición anterior, notemos que:*

$$a - a_m =_{\lambda(\epsilon)} 0$$

Observación 2.8. *Una propiedad fundamental que cumple el cuerpo de Levi-Civita, es la siguiente:*

$$\forall \epsilon \in \mathcal{R} \epsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} 0 < d^n < \epsilon$$

Por tanto

$$d^n \to 0, \textit{cuando } n \to \infty$$

Esta propiedad la llamaremos minimalmente arquimediana.
Cabe notar que existen otros cuerpos ordenados que cumplen con esta propiedad, como el cuerpo de Hans-Keller truncado [8] *o cualquier cuerpo ordenado con un orden arquimediano. También existen otros cuerpos que no cumplen esta propiedad como el cuerpo de Hans-Keller(sin truncar).*

Teorema 2.4 (Expansión en serie de potencias)**.** *Sea* $((q_i), (x[q_i]))$ *las sucesiones que definen a* $x \in \mathcal{R}$*. Entonces la sucesión*

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} x[q_i] d^{q_i}$$

converge fuertemente a x. Por lo que podemos escribir:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x[q_i] d^{q_i}$$

Demostración:
Sin pérdida de generalidad supongamos que $\{q_i\}$ es una sucesión infinita creciente.
Sea $\epsilon > 0$ con $\epsilon \in \mathcal{R}$, consideremos $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$d^n < \epsilon$$

Como $\{q_i\}$ es una sucesión divergente y creciente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall m > n_0 \quad q_m > n$$

Por lo tanto, $(x_m - x)[i] = 0$ para $m > n_0$ y $i \leq n$.
Entonces

$$|x_m - x| \leq d^n < \epsilon \quad \text{ para } m > n_0$$

■

Teorema 2.5. *Sea (a_i) una sucesión en $\mathcal{R}$ entonces (a_i) converge fuertemente si y solo si para todo $r \in \mathbb{Q}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*
$\forall i_1, i_2 > n \ a_{i_1} =_r a_{i_2}$.
La serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ converge fuertemente si y solo si la sucesión (a_i) converge a cero.

Demostración:
Primero demostremos la primera parte del enunciado.
Supongamos que $a_n \to a \in \mathcal{R}$.
Dado $r \in \mathbb{Q}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $r < n_0$. Consideremos $\epsilon = d^{n_0}$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall m > N \quad |a - a_m| < \epsilon$$

Luego por la observación anterior tenemos que

$$\forall m > N \quad a_m - a =_{n_0} 0$$

En particular

$$\forall m > N \quad a_m - a =_r 0$$

Es decir,

$$\forall i_1, i_2 > N \quad a_{i_1} - a_{i_2} =_r 0$$

como se quería probar.

Supongamos ahora que para todo $r \in \mathbb{Q}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que
$\forall i_1, i_2 > n \quad a_{i_1} =_r a_{i_2}$. Contruiremos un elemento $a \in \mathcal{R}$ en forma recursiva:
Para $n = 0$ sea $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall j, i \geq N_0 \quad a_i =_0 a_j.$$

Definimos para $r \in \mathbb{Q}, r \leq 0$

$$a(r) = a_{N_0} = a_j(r) \text{ para todo } j \geq N_0$$

Ahora, para $n = 1$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall j, i \geq N_1 \quad a_i =_1 a_j$$

La última igualdad nos permite asumir sin pérdida de generalidad que $N_1 \geq N_0$. Definimos para $r \in \mathbb{Q}, r \leq 1$

$$a(r) = a_{N_1} = a_j(r) \text{ para todo } j \geq N_1$$

Notemos que a está bien definido para todo $r \leq 0$ ya que

$$a(r) = a_{N_0}(r) = a_{N_1}(r)$$

Procedemos entonces en forma recursiva. Sea $m \in \mathbb{N}$.
Para $n = m$ existe $N_m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall j, i \geq N_m \quad a_i =_m a_j$$

La última igualdad nos permite asumir sin pérdida de generalidad que $N_m \geq N_{m-1}$. Definimos para $r \in \mathbb{Q}, r \leq m$

$$a(r) = a_{N_m} = a_j(r) \text{ para todo } j \geq N_m$$

Notemos que a está bien definido para todo $r \leq m$ ya que

$$a(r) = a_{N_{m-1}}(r) = a_{N_m}(r)$$

Es claro que $a \in \mathcal{R}$, por lo que solo nos falta ver que $a_n \to a$.
Ahora bien, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $N_n \in \mathbb{N}$ tal que si $j > n$,

$$a_j =_n a_N =_n a.$$

Por tanto,

$$|a - a_j| < d^n$$

lo que implica que

$$a_j \to a$$

Ahora demostremos la segunda parte del teorema.
Primero supongamos que la serie converge fuertemente, entonces por la primera parte para todo $r \in \mathbb{Q}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 =_r (\sum_{i=1}^{j+1} a_i - \sum_{i=1}^{j} a_i) = a_j \text{ para todo } j \geq n.$$

Entonces,

$$\forall j > n \quad 0 =_r a_j$$

Nuevamente por la primera parte, obtenemos que

$$a_j \to 0$$

Ahora supongamos que $a_j \to 0$. Por la primera parte esto implica que

$$\forall j > n \quad 0 =_r a_j$$

Entonces, para todo $m \in \mathbb{N}$

$$\forall j > n \quad 0 =_r a_{j+m} + ... + a_j =_r a_j$$

Por lo que,

$$0 =_r (\sum_{i=1}^{j+m} a_i - \sum_{i=1}^{j} a_i) = a_{j+1} \text{ para todo } j \geq n \text{ , } m \in \mathbb{N}$$

luego por la parte 1 obtenemos lo que buscábamos.

■

Teorema 2.6. (a_n) *es una sucesión de Cauchy en* $\mathcal{R}$ *si y solo si* (a_n) *converge fuertemente en* $\mathcal{R}$*.*

Demostración:
Sea (a_n) una sucesión de Cauchy en $\mathcal{R}$. Consideremos la sucesión $b_n = a_{n+1} - a_n$, notemos que esta sucesión converge a cero.
Por el teorema anterior la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ converge.
Por último, notemos que $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} b_i$, por lo que la sucesión a_n converge fuertemente.
La demostración del recíproco es exactamente igual que en el caso real.

■

Corolario 2.1. *El conjunto* $\mathcal{R}^d$ *es Cauchy completo.*

3. Medida en $\mathcal{R}^d$

En este capítulo se desarrolla el tema central de esta tesis, el estudio de la medida en los espacios $\mathcal{R}^d = \{(x_1, \ldots, x_d) : x_i \in \mathcal{R}\}$. Las demostraciones cubren el caso $d = 1$ estudiado en [6], que fue la base de este trabajo.

Definición 3.1.

1. Definimos $m(\phi) = 0$.
2. Sea $I(a, b) \subset \mathcal{R}$ un intervalo cerrado, abierto o semi-abierto, donde a, b son elementos distintos de $\mathcal{R}$. Definimos la *medida del rectángulo* $R = I_1(a_1, b_1) \times ... \times I_d(a_d, b_d) \subset \mathcal{R}^d$ como $m(R) = \prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i)$
3. $A \subset \mathcal{R}^d$ se llama *un bloque* (de $\mathcal{R}^d$) si $A = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$ donde los (I_n) son una sucesión de rectángulos disjuntos dos a dos.
   Además si $\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n)$ converge en $\mathcal{R}$, llamaremos a esta suma la medida del bloque A y la designaremos por $m(A)$.

Definición 3.2. Sea $A \subset \mathcal{R}^d$ dado, decimos que A es medible si para cada $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathcal{R}$, existen bloques $B = B(\epsilon), C = C(\epsilon)$ tal que

1. $B \subset A \subset C$
2. $m(B)$ y $m(C)$ están bien definidos en $\mathcal{R}$
3. $m(C) - m(B) < \epsilon$

Lema 3.1. *Si A, B son rectángulos tal que $A \subset B$ entonces existe una sucesión finita de rectángulos ,$(A_j)_{j=1}^{N}$, dos a dos disjuntos tal que (figura 1)*

$$A_1 = A, \quad B = \cup_{j=1}^{N} A_j$$

$$m(B) = \sum_{j=1}^{N} m(A_j)$$

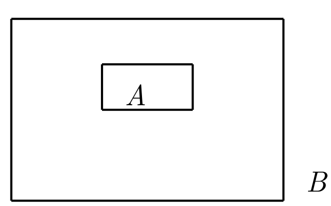

figura 1

Demostración:
Supongamos que $A = I(a_1, b_1) \times ... \times I(a_d, b_d)$ y que $B = I(\alpha_1, \beta_1) \times ... \times I(\alpha_d, \beta_d)$. Sea $\mathfrak{F}_\mathfrak{i} = \{x \in \mathcal{R} : x = a_i \vee x = b_i \vee x = \alpha_i \vee x = \beta_i, i = 1, \ldots d\}$. Como $A \subset B$ tenemos que

$$\alpha_1 \leq a_1 < b_1 \leq \beta_1$$
$$\alpha_2 \leq a_2 < b_2 \leq \beta_2$$
$$....$$
$$\alpha_d \leq a_d < b_d \leq \beta_d$$

Consideramos los rectángulos $I(x_1, y_1) \times .. \times I(x_d, y_d)$ tal que $x_i, y_i \in \mathfrak{F}_{\mathrm{i}}$, y x_i el predecesor inmediato de $y_i \in \mathfrak{F}_{\mathrm{i}}$. Esta sucesión de rectángulos es finita y es una partición de B.
Por contrucción $A = I(a_1, b_1) \times ... \times I(a_d, b_d)$.

■

Teorema 3.1. *Sean A, B bloques de $\mathcal{R}^d$. Supongamos que $m(A)$ y $m(B)$ están bien definidas y que $A \subset B$. Entonces*

$$m(A) \leq m(B)$$

Más aún, existe un bloque L disjunto a A tal que

$$B = A \cup L$$

$$m(B) = m(A) + m(L)$$

Demostración:
Sean $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ las sucesiones de rectángulos asociadas a los bloques A y B respectivamente. Construiremos la sucesión de rectángulos asociada al bloque L en forma recursiva:
Paso $i = 1$.
Como $I_1 \subset \cup_{n=1}^{\infty} J_n$ entonces existe una subsucesión (J_{j_k}) tal que
$I_1 \cap J_{j_k} \neq \phi$ y $I_1 \cap J_j = \phi$ si $j \neq j_k$.
Como $I_1 \cap J_{j_1} \neq \phi$ por el lema anterior existe una sucesión finita de rectángulos $(L_{(n,1,1)})_{n=1}^{N_1}$ dos a dos disjunta tal que

$$L_{(1,1,1)} = I_1 \cap J_{j_1} \quad \wedge \quad J_{j_1} = \cup_{n=1}^{N_1} L_{(n,1,1)}$$

$$m(J_{j_1}) = \sum_{n=1}^{N_1} m(L_{(n,i,1)})$$

Análogamente, si $m \in \mathbb{N}$ entonces $I_1 \cap J_{j_m} \neq \phi$ nuevamente por el lema anterior existe una sucesión de rectángulos $(L_{(n,1,m)})_{n=1}^{N_m}$ dos a dos disjunta tal que

$$L_{(1,1,m)} = I_1 \cap J_{j_m} \quad \wedge \quad J_{j_m} = \cup_{n=1}^{N_m} L_{(n,1,m)}$$

$$m(J_{j_m}) = \sum_{n=1}^{N_m} m(L_{(n,1,m)})$$

Como $m(J_{j_m}) \to 0$ cuando $m \to \infty$ entonces $\sum_{n=1}^{N_m} m(L_{(n,1,m)}) \to 0$. Por lo que $\sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{N_m} m(L_{(n,1,m)})$ converge.

Al terminar la iteración sobre m se obtiene una colección de rectángulos dos a dos disjuntos tal que

$$\cup_{k\in\mathbb{N}} J_{j_k} = \cup_{m\in\mathbb{N}} \cup_{n=1}^{N_m} L_{(n,1,m)}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} m(J_{j_k}) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{N_m} m(L_{(n,1,m)})$$

Obtenemos

$$\cup_{k\in\mathbb{N}} J_{j_k} = I_1 \bigcup \left(\cup_{m\in\mathbb{N}} \cup_{n=2}^{N_m} L_{(n,1,m)}\right)$$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} m(J_{j_k}) = m(I_1) + \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n=2}^{N_m} m(L_{(n,1,m)})$$

Ahora repetimos el proceso para $i = 2$ renombrando los rectángulos J_j con $j \neq j_k$ y $L_{(n,1,m)}$ como los nuevos $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Luego repetimos el proceso para $i = 3$ y así sucesivamente.
Al término de la iteración sobre i obtenemos:

$$\cup_{n=1}^{\infty} J_n = (\cup_{n=1}^{\infty} I_n) \bigcup (\cup_{n\in\mathbb{N}} L_n)$$

donde la sucesión de rectángulos (L_n) y la sucesión de rectángulos (I_n) son disjuntas dos a dos. Definimos

$$L = \cup_{n\in\mathbb{N}} L_n$$

con lo que $B = A \cup L$. Además

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} m(L_n).$$

Es claro que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(L_n)$ converge ya que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m(L_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(J_n) - \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n)$$

y el lado derecho converge. Luego $m(B) = m(A) + m(L)$.

■

Observación 3.1. *Notemos que el bloque L no es más que la diferencia entre A y B.*

Corolario 3.1. *Si A, B son dos bloques medibles con $A \subset B$ entonces $B - A$ es un bloque medible y se tiene que*
$B = (B - A) \bigcup A$ *y* $m(B) = m(B - A) + m(A)$
En particular, $m(A) \leq m(B)$ *y* $m(B - A) = m(B) - m(A)$

Lema 3.2. *Sea A es un conjunto medible de $\mathcal{R}^d$ entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ existen dos sucesiones de bloques medibles, (I^k) y (J^k) tales que*

$$I^k \subset I^{k+1} \subset A \subset J^{k+1} \subset J^k$$

$$m(J^k) - m(I^k) \leq d^k$$

Demostración:
Procederemos por inducción sobre k. Para $k = 1$ existen, por ser A medible, bloques I^1, J^1 tales que

$$I^1 \subset J^1.$$

$$m(J^1) - m(I^1) < d.$$

Supongamos construido hasta N, es decir que existen bloques $(I^j)_{j=1\ldots N}$ y $(J^j)_{j=1\ldots N}$ tales que

$$I^1 \subset \ldots \subset I^N \subset A \subset J^N \subset \ldots \subset J^1$$

$$m(J^j) - m(I^j) < d^j.$$

Construyamos el bloque N+1.
Por definición existen bloques $I^\star$ y $J^\star$ tal que

$$I^\star \subset A \subset J^\star$$

$$m(J^\star) - m(I^\star) < d^{N+1}$$

Sea $(J_n^\star)$ la sucesión de rectángulos asociados al bloque $J^\star$ y sea (J_n^N) la sucesión de rectángulos asociados al bloque J^N. Además, sin pérdida de generalidad supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$J_n^N \cap A \neq \phi \quad \wedge \quad J_n^\star \cap A \neq \phi.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una sucesión $\{n_j\}$ tal que

$$J_n^\star \cap J_{n_j}^N \neq \phi \quad \wedge \quad J_n^\star \cap J_m^N = \phi \text{ si } m \neq j_k.$$

Definimos $J_{n,j} = J_n^\star \cap J_{n_j}^N$; ésta es una familia numerable de rectángulos dos a dos disjuntos. Designaremos al bloque asociado a ella por J^{N+1}.
Notemos que para todo $j \in \mathbb{N}$

$$m(J_{n,j}) \leq m(J_{n_j}^N)$$

Como $m(J_{n_j}^N) \to 0$ entonces $m(J_{n,j}) \to 0$ cuando $j \to \infty$ obtenemos que $\sum_j m(J_{n,j})$ está bien definido. Por otro lado,

$$\sum_j m(J_{n,j}) \leq m(J_n^\star)$$

Como $m(J_n^\star) \to 0$ entonces $\sum_j m(J_{n,j}) \to 0$ por lo que $m(J^{N+1})$ está bien definido. Además

$$m(J^{N+1}) \leq m(J^\star),$$

por lo que

$$m(J^{N+1}) - m(I^\star) \leq m(J^\star) - m(I^\star) \leq d^{N+1}.$$

Ahora construyamos el bloque I^{N+1} de forma análoga.
Sea $(I_n^\star)$ la sucesión de rectángulos asociados al bloque $I^\star$ y sea (I_n^N) la sucesión de rectángulos asociados al bloque I^N. Definimos

$$I^{N+1} = (I_n^\star) \cup (I_n^N)$$

y afirmamos que es un bloque ya que se puede escribir en su notación de rectángulos disjuntos dos a dos de la siguiente forma:

$$\bigcup_n (I_n^\star - \cup_j I_j^N) \bigcup_n (I_n^N - \cup_j I_j^\star) \bigcup_{n,m} (I_n^N \cap I_m^\star)$$

Ahora veremos que $m(I^{N+1})$ está bien definida. Primero notamos que $m(I_n^\star - \cup_j I_j^N)$ lo está, por el lema 3.1. Además

$$m(I_n^\star - \cup_j I_j^N) \leq m(I_n^\star)$$

como $m(I_n^\star) \to 0$ cuando $n \to \infty$ entonces $m(I_n^\star - \cup_j I_j^N) \to 0$. Luego $\sum_n m(I_n^\star - \cup_j I_j^N)$ converge.
Análogamente $\sum_n m(I_n^N) - \cup_j I_j^\star$ converge. Por último, para todo $m \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$m(I_n^N \cap I_m^\star) \leq m(I_m^\star)$$

Como $m(I_m^\star) \to 0$(cuando $m \to \infty$) entonces $m(I_n^N \cap I_m^\star) \to 0$. Luego $\sum_m m(I_n^N \cap I_m^\star)$ converge. Además

$$\sum_m m(I_n^N \cap I_m^\star) \leq m(I_n^N)$$

Como $m(I_n^N) \to 0$(cuando $n \to \infty$) entonces $\sum_m m(I_n^N \cap I_m^\star) \to 0$. Luego $\sum_n \sum_m m(I_n^N \cap I_m^\star)$ converge. Por lo que $m(I^{N+1})$ está bien definido. Además

$$I^\star \subset I^{N+1}$$

Entonces

$$m(I^\star) \leq m(I^{N+1})$$

Luego

$$m(J^\star) - m(I^{N+1}) \leq m(J^\star) - m(I^\star) \leq d^{N+1}$$

Por último,

$$\begin{aligned} m(J^{N+1}) - m(I^{N+1}) &\leq m(J^{N+1}) - m(I^\star) + m(I^\star) - m(J^\star) + m(J^\star) - m(I^{N+1}) \\ &\leq d^{N+1} - d^{N+1} + d^{N+1} = d^{N+1} \end{aligned}$$

Lo que termina el proceso de inducción y la demostración.

■

Corolario 3.2. *Si A, B son dos bloques tal que $m(A)$ y $m(B)$ están bien definidas entonces $A \cap B$ es un bloque y $m(A \cap B)$ está bien definida. Se tiene que $m(A \cap B) \leq \min\{m(A), m(B)\}$*

Corolario 3.3. *Si A, B son dos bloques tal que $m(A)$ y $m(B)$ están bien definidas entonces $A \cup B$ es un bloque y $m(A \cup B)$ está bien definida.*

Lema 3.3. *Bajo las hipótesis y notación del lema anterior, tenemos que las sucesiones* $(m(I^k))_{k\in\mathbb{N}}$ *y* $(m(J^k))_{k\in\mathbb{N}}$ *son de Cauchy.*
Más aún,

$$\lim_{k\to\infty} m(J^k) = \lim_{k\to\infty} m(I^k)$$

Demostración:
Sea $\epsilon > 0 \in \mathcal{R}$ entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $d^m < \epsilon$. Primero demostremos que $(m(I^k))_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.
Consideramos $N = m + 1$ entonces para todo $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, sin pérdida de generalidad $k_2 > k_1 \geq N$

$$\begin{aligned} m(I^{k_2}) - m(I^{k_1}) &\leq m(I^{k_2}) - m(J^{k_2}) + m(J^{k_2}) - m(I^{k_1}) \\ &\leq d^{k_2} + m(J^{k_2}) - m(I^{k_1}) \\ &\leq d^{k_2} + m(J^{k_1}) - m(I^{k_1}) \\ &\leq d^{k_2} + d^{k_1} \leq 2d^{k_1} \leq 2d^N \leq d^m < \epsilon \end{aligned}$$

Por lo que $(m(I^k))_{k\in\mathbb{N}}$ es Cauchy. Análogamente, $(m(J^k))_{k\in\mathbb{N}}$ es Cauchy. Como $\mathcal{R}$ es completo existen $I, J \in \mathcal{R}$ tal que

$$m(I^k) \to I \in \mathcal{R}$$
$$m(J^k) \to J \in \mathcal{R}$$

Como $|m(I^k) - m(J^k)| \leq d^k$ cuando $k \to \infty$ tenemos que

$$|I - J| = 0 \Rightarrow I = J$$

■

Definición 3.3. (Con la notación anterior). Definimos la medida de un conjunto medible A:

$$m(A) = lim_{k\to\infty} m(J^k) = lim_{k\to\infty} m(I^k)$$

Observación 3.2. *Notemos que* $m(I^k) \nearrow m(A)$ *y* $m(J^k) \searrow m(A)$.

Ejemplo 3.1. *La definición de conjunto medible va muy relacionada con la noción de medida finita. De hecho, todo conjunto medible posee medida finita. Ilustremos algunos conjuntos no medibles.*

1. *El conjunto* $\mathcal{R}$.
2. *El conjunto de Cantor de* $\mathbb{R}$.
   Esto prueba que la medida de $\mathcal{R}$ *no es una extensión de la medida de Lebesgue en* $\mathbb{R}$
3. *Todo conjunto no numerable de* $\mathbb{R}$ *no es medible como conjunto de* $\mathcal{R}$

Proposición 3.1. *Sea* $A \subset \mathcal{R}^d$ *medible. Entonces*

$$m(A) = \inf\{m(J) : J \text{ es un bloque }, A \subset J, m(J) \text{ está bien definida}\}. \tag{3.1}$$

$$m(A) = \sup\{m(I) : I \text{ es un bloque}, I \subset A, m(I) \text{ está bien definida}\} \tag{3.2}$$

Demostración:
Demostremos la primera afirmación, es decir que el ínfimo existe y es igual a $m(A)$.
Sea J un bloque tal que $m(J)$ está bien definido y $A \subset J$, entonces basta probar que

$$m(A) \leq m(J)$$

ya que por el lema 3.2 y la observación 3.2 tendríamos la afirmación.
Supongamos que no es cierto, entonces existe un bloque (J^0) tal que $m(J^0)$ está bien definido, $A \subset m(J^0)$ pero $m(A) > m(J^0)$.
Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$d^k < \frac{m(A) - m(J^0)}{2}$$

Sea (I^k) y (J^k) como en el lema 3.2.
Entonces $I^k \subset A \subset J^k$.

$$m(J^k) - m(I^k) \leq d^k$$

Como $I^k \subset A \subset J^0$ e I^k es un bloque, obtenemos

$$m(I^k) \leq m(J^0) \Rightarrow 0 \leq m(J^0) - m(I^k)$$

Por otro lado,

$$m(A) - m(I^k) \leq m(J^k) - m(I^k) \leq d^k$$

Entonces

$$\begin{aligned} m(J^0) - m(I^k) &= (m(J^0) - m(A)) + (m(A) - m(I^k)) \\ &\leq (m(J^0) - m(A)) + d^k \\ &< (m(J^0) - m(A)) + \frac{m(A) - m(J^0)}{2} \\ &= \frac{m(J^0) - m(A)}{2} < 0 \end{aligned}$$

lo que es una contradicción.
La demostración de la segunda afirmación se hace de manera análoga.

■

Observación 3.3. *Notemos que un cuerpo con un orden no arquimediano como Levi-Civita no es completo por cortaduras de Dedekind, es decir, los ínfimos (resp. supremos) de conjuntos inferiormente (resp. superiormente) acotados no siempre existen.*
Por ejemplo, el conjunto $\{x \in \mathcal{R} : 0 < x << 1\}$ *no posee un supremo.*
Es por eso que la proposición anterior es importante, y no se puede definir los conjuntos medibles de la manera usual por ínfimos y supremos.

Corolario 3.4. *Si* A, B *son medibles y* $B \subset A \subset \mathcal{R}^d$ *entonces*

$$m(B) \leq m(A)$$

Proposición 3.2. *Sea $A \subset \mathcal{R}^d$ medible con $m(A) = 0$ y $B \subset A$. Entonces B es medible y $m(B) = 0$*

Demostración:
Primero probemos que B es medible.
Sea $\epsilon > 0, \epsilon \in \mathcal{R}$, por la proposición 3.1 existe un bloque J tal que $A \subset J$, $m(J)$ está bien definida y $m(J) \leq \epsilon$.
Consideremos el bloque $I = \emptyset$ entonces

$$I \subset B \subset A \subset J$$

$$m(J) - m(I) = m(J) \leq \epsilon$$

lo que prueba que B es medible.
Por último, como $B \subset A$ tenemos que

$$0 \leq m(B) \leq m(A) = 0,$$

lo que implica que

$$m(B) = 0.$$

■

Proposición 3.3. *Sea $A \subset \mathcal{R}^m$ finito entonces A es medible y $m(A) = 0$*

Demostración:
Sea $k \in \mathbb{N}$, $A = \{a_1, .., a_k\}$, $a_j = (a_j^1, ...a_j^m) \in \mathcal{R}^m$
Dado $\epsilon > 0, \epsilon \in \mathcal{R}$, sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d^N < \epsilon$.
Consideremos la sucesión de rectángulos,

$$I_j = \emptyset$$

$$J_j(M) = [a_j^1 - d^M, a_j^1 + d^M] \times .. \times [a_j^d - d^M, a_j^m + d^M] \text{ para } 1 \leq j \leq k$$

$$J_j(M) = \emptyset \text{ para } j > k$$

Puesto que A es finito podemos tomar $M_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que los rectángulos $J_j(M_0)$ sean disjuntos dos a dos. Ahora basta tomar $M = \text{máx}\{M_0, N+1\}$. Ponemos $J_j = J_j(M)$ para todo $j \in \mathbb{N}$ Entonces la sucesión de rectángulos $(I_j), (J_j)$ son disjuntos dos a dos y $\cup_{n=1}^{\infty} I_n \subset A \subset \cup_{n=1}^{\infty} J_n$.
Además,

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(J_n) - \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(J_n) = 2^m d^{Mm} \leq 2^m d^M \leq d^N \leq \epsilon$$

por lo que A es medible. Es claro que $m(A) = 0$.

■

Proposición 3.4. *Sea A, B dos conjuntos medibles de $\mathcal{R}^d$ entonces $A \cup B$ es medible.*

Demostración:
Dado $\epsilon > 0, \epsilon \in \mathcal{R}$. Como A y B son medibles existen bloques I^1, J^1, I^2, J^2 tal que sus medidas están bien definidas ,

$$I^1 \subset A \subset J^1$$
$$I^2 \subset B \subset J^2$$
$$m(J^1) - m(I^1) < \epsilon$$
$$m(J^2) - m(I^2) < \epsilon$$

Sean (I_n^1) y (J_n^1) las sucesiones de rectángulos asociadas a los bloques I^1, J^1 y sean (I_n^2) y (J_n^2) las sucesiones de rectángulos asociadas a los bloques I^2, J^2. Consideremos

$$I = I^1 \cup I^2 = \cup I_n^1 \bigcup \cup I_n^2$$
$$J = J^1 \cup J^2 = \cup J_n^1 \bigcup \cup J_n^2$$

Entonces I, J son bloques tal que $I \subset A \cup B \subset J$. Además I se puede escribir como union de rectángulos disjuntos dos a dos como sigue:

$$I = \bigcup_n (I_n^1 - \cup_j I_j^2) \bigcup_n (I_n^2 - \cup_j I_j^1) \bigcup_{n,m} (I_n^1 \cap I_m^2)$$

Ya vimos que $m(I)$ está bien definido en la demostración del lema 3.2.
De la misma manera J se puede escribir como unión de rectángulos disjuntos dos a dos como sigue:

$$J = \bigcup_n (J_n^1 - \cup_j J_j^2) \bigcup_n (J_n^2 - \cup_j J_j^1) \bigcup_{n,m} (J_n^1 \cap J_m^2)$$

De forma análoga $m(J)$ está bien definido por la demostración de que $m(I)$ está bien definido del lema 3.2. Por último,

$$\begin{aligned} m(J) - m(I) &= \sum_n m(J_n^1 - (\cup J_j^2)) + \sum_n m(J_n^2 - (\cup J_j^1)) + \sum_{n,m} m(J_n^1 \cap J_m^2) \\ &\quad - [\sum_n m(I_n^1 - (\cup I_j^2)) + \sum_n m(I_n^2 - (\cup I_j^1)) + \sum_{n,m} m(I_n^1 \cap I_m^2)] \\ &\leq 3\epsilon \end{aligned}$$

Con lo que $A \cup B$ es medible.

■

Ejemplo 3.2. *Notemos que el hecho que $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sea una sucesión de conjuntos medibles en $\mathcal{R}$ tal que $\bigcup_k A_k \subset (a, b)$ en $\mathcal{R}$, no asegura que su unión sea medible. En efecto, si tomamos los conjuntos $A_n = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ con $n \in \mathbb{N}$, estos conjuntos son medibles pero su unión no es medible pues $\sum m(A_n)$ no converge. El ejemplo se generaliza fácilmente a $\mathcal{R}^d$.*

Proposición 3.5. *Sean $A, B \subset \mathcal{R}^d$ medibles entonces $A \cap B$ es medible y $m(A \cap B) \leq \text{mín}\{m(A), m(B)\}$.*

Demostración:
Dado $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathcal{R}$. Existen bloques I^1, J^1, I^2, J^2 con sucesiones de rectángulos asociados $(I^1_n), (J^1_n), (I^2_n), (J^2_n)$ respectivamente.

$$I^1 \subset A \subset J^1$$

$$I^2 \subset B \subset J^2$$

Además, $m(I^1)$, $m(I^2)$, $m(J^1)$, $m(J^2)$ están bien definidas.

$$m(J^1) - m(I^1) \leq \epsilon$$

$$m(J^2) - m(I^2) \leq \epsilon$$

Consideremos los bloques $I = I^1 \cap I^2$ y $J = J^1 \cap J^2$, es claro que $m(I)$ y $m(J)$ están bien definidos. Además $I \subset A \cap B \subset J$.
Sean $P := J - (I^1 \cup I^2)$, $L_{2k} := (J \cap I^2_k) - (I^1)$, $L_{2k+1} := (J \cap I^1_k) - (I^2)$, notemos que $J - I$ se puede escribir como unión disjunta de los conjuntos P, L_{2k}, L_{2k+1}, es decir,

$$J - I = P \bigcup (\cup_k L_{2k}) \bigcup (\cup_k L_{2k+1})$$

Además

$$P \bigcup (\cup_k L_{2k}) \subset J - I^1 \subset J^1 - I^1$$

$$\cup_k L_{2k+1} \subset J - I^2 \subset J^2 - I^2$$

Con lo que

$$\begin{aligned} m(J) - m(I) &= m(P) + \sum m(L_{2k}) + \sum m(L_{2k+1}) \\ &\leq m(J^1) - m(I^1) + \sum m(L_{2k+1}) \\ &\leq \epsilon + \sum m(L_{2k+1}) \leq \epsilon + m(J^2) - m(I^2) \\ &\leq 2\epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A \cap B$ es medible.
Por último, como $A \cap B \subset B$ tenemos que

$$m(A \cap B) \leq m(A)$$

$$m(A \cap B) \leq m(B)$$

$$\Rightarrow m(A \cap B) \leq \min\{m(A), m(B)\}$$

■

Ejemplo 3.3. *Notemos que en la proposición anterior no basta con acotar* $m(J) - m(I) \leq m(J^1) - m(I^1) \leq \epsilon$. *Consideremos el siguiente ejemplo; sea*

$A = [0,2], B = [1,3]$ *y* $\epsilon > 0, \epsilon \in \mathcal{R}$ *(según la notación de la proposición)*

$$\begin{array}{rr} I_1^1 = [0, 2-\epsilon] & m(I_1^1) = 2-\epsilon \\ J_1^1 = A & m(J_1^1) = 2 \\ I_1^2 = [1+\epsilon, 3] & m(I_1^2) = 2-\epsilon \\ J_1^2 = B & m(J_1^2) = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} I_1 = I_1^1 \cap I_1^2 = [1+\epsilon, 2-\epsilon] & m(I_1) = 1-2\epsilon \\ J_1 = J_1^1 \cap J_1^2 = [1,2] & m(J_1) = 1 \end{array}$$

Pero entonces

$$\sum_n m(J_n) - \sum_n m(I_n) = m(J_1) - m(I_1) = 2\epsilon > \sum_n m(J_n^1) - \sum_n m(I_n^1) = \epsilon$$

Lema 3.4. *Sean* $A, B \subset \mathcal{R}^d$ *bloques y supongamos que* $m(A)$ *y* $m(B)$ *están bien definidos entonces*

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$$

Demostración:
Por el lema 3.1 sabemos que $A-B$ y $B-A$ son bloques. Además, $m(A\cup B) = m(A \cap B) + m(B-A) + m(A-B)$.
Nuevamente por el lema 3.1 sabemos que $m(B) = m(B \cap A) + m(B-A)$ y $m(A) = m(A \cap B) + m(A-B)$. Por lo tanto,

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$$

■

Proposición 3.6. *Sean* $A, B \subset \mathcal{R}^d$ *medibles entonces*

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$$

Demostración:
Sea $\epsilon > 0, \epsilon \in \mathcal{R}$ por la proposición 3.1 existen bloques I, J tal que
$m(A) + \epsilon > m(I)$, $m(B) + \epsilon > m(J)$, $A \subset I$ y $B \subset J$
Es claro que $I \cap J$ y $I \cup J$ son bloques tal que
$A \cap B \subset (I \cap J)$ y $A \cup B \subset (I \cup J)$. Además,

$$\begin{aligned} m(A \cup B) + m(A \cap B) &\leq m(I \cup J) + m(I \cap J) \\ &= m(I) + m(J) \\ &\leq m(A) + m(B) + 2\epsilon \end{aligned}$$

Como ϵ es arbitrario, obtenemos que

$$m(A \cup B) \leq m(A) + m(B) - m(A \cap B)$$

Análogamente probaremos que

$$m(A \cup B) \geq m(A) + m(B) - m(A \cap B)$$

Sea $\epsilon > 0, \epsilon \in \mathcal{R}$ por la proposición 3.1 existen bloques I, J tal que
$m(A) - \epsilon < m(I)$, $m(B) - \epsilon < m(I)$, $I \subset A$ y $J \subset B$

Es claro que $I \cap J$ y $I \cup J$ son bloques tal que
$I \cap J \subset (A \cap B)$ y $I \cup J \subset (A \cup B)$. Además,

$$\begin{aligned} m(A \cup B) + m(A \cap B) &\geq m(I \cup J) + m(I \cap J) \\ &= m(I) + m(J) \\ &\geq m(A) + m(B) + 2\epsilon \end{aligned}$$

Como ϵ es arbitrario, obtenemos que

$$m(A \cup B) \leq m(A) + m(B) - m(A \cap B)$$

■

Proposición 3.7. *Sea* $A \subset \mathcal{R}^d$ *medible,* $c \in \mathcal{R}$ *y* $\lambda < 1, \lambda \in \mathcal{R}$ *entonces* $A+c = \{(a_1+c, \ldots, a_d+c) : \ (a_1, \ldots, a_d) \in A\}$ *es medible y* λA *es medible. Además*

$$\begin{aligned} m(A + c) &= m(A) \\ m(\lambda A) &= \lambda^d m(A) \end{aligned}$$

Demostración:

i) Dado $\epsilon > 0$ existen dos sucesiones de rectángulos dos a dos disjuntos, (I_n) y (J_n), tal que $\sum m(I_n)$ y $\sum m(J_n)$ converge

$$\cup_{n \in \mathbb{N}} I_n \subset A \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} J_n$$

$$\sum m(J_n) - \sum m(I_n) < \epsilon$$

Es fácil ver que $A+c$ es medible ya que tanto la sucesión de rectángulos $(I_n + c)$ como la de $(J_n + c)$ son disjuntas dos a dos.
Además, $\sum m(I_n + c) = \sum m(I_n)$,$\sum m(J_n + c) = \sum m(J_n)$ por lo que convergen.

$$\cup_{n \in \mathbb{N}} (I_n + c) \subset A + c \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} (J_n + c)$$

$$\sum m(J_n + c) - \sum m(I_n + c) = \sum m(J_n) - \sum m(I_n) < \epsilon$$

Con lo que $A + c$ es medible Por último como,

$$m(A + c) = lim_{n \to \infty} \sum m(I_n + c) = lim_{n \to \infty} \sum m(I_n) = m(A)$$

tenemos que lo que queríamos probar.

ii) Dado $\epsilon > 0$ existen sucesiones de rectángulos dos a dos disjuntos, (I_n) y (J_n), tales que $\sum m(I_n)$ y $\sum m(J_n)$ converge.

$$\cup_{n \in \mathbb{N}} I_n \subset A \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} J_n$$

$$\sum m(J_n) - \sum m(I_n) < \epsilon$$

Es fácil ver que λA es medible ya que ambas sucesiones de rectángulos (λI_n) y (λJ_n) son disjuntas dos a dos.
Además, $\sum m(\lambda I_n) = \lambda^d \sum m(I_n)$,$\sum m(\lambda J_n) = \lambda^d \sum m(J_n)$ por lo que convergen. Como

$$\cup_{n \in \mathbb{N}} \lambda I_n \subset \lambda A \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} \lambda J_n$$

$$\sum m(\lambda J_n) - \sum m(\lambda I_n) = \lambda^d (\sum m(J_n) - \sum m(I_n)) < \lambda^d \epsilon$$

se tiene que λA es medible.

Por último, como

$$m(\lambda A) = lim_{n \to \infty} \sum m(\lambda I_n) = \lambda^d lim_{n \to \infty} \sum m(I_n) = \lambda^d m(A)$$

tenemos que lo que queríamos probar.

■

4. Anexos

4.1. Anexo 1. Extensiones de cuerpos en $\mathcal{R}$.

El cuerpo $\mathcal{R}$ no solo es interesante por sus propiedades analíticas y topológicas sino que también tiene preguntas atractivas desde el punto de vista del álgebra, particularmente de la teoría de cuerpos. En este anexo se presentarán dos preguntas formuladas con respecto a extensiones de cuerpos del cuerpo Levi-Civita real.

Definición 4.1. Sea $\mathbb{F}$ un subcuerpo del cuerpo de números complejos, $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{C}$, entonces definiremos

$$L\mathbb{F} = \{f : \mathbb{Q} \to \mathbb{F} : supp(f) \text{ es finito izquierdo } \}$$

Es claro que $L\mathbb{R} = \mathcal{R}$, y se puede probar que $L\mathbb{F}$ es un cuerpo de la misma forma en que se procede con $\mathcal{R}$.
Cabe destacar que $L\mathbb{C}$ es un cuerpo tan bien estudiado como lo es $L\mathbb{R}$. De hecho, $L\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado y la dimensión de $L\mathbb{C}$ sobre $L\mathbb{R}$ es 2 ($[L\mathbb{C} : L\mathbb{R}] = 2$), es decir, $L\mathbb{R}$ es real cerrado. Más aún

$$L\mathbb{C} = L\mathbb{R} + iL\mathbb{R}$$

Consideremos ahora la torre de extensiones $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{E} \hookrightarrow \mathbb{C}$. Si $[\mathbb{E} : \mathbb{F}] = n$, quiero responder la siguiente pregunta: ¿Es verdad que $[L\mathbb{E} : L\mathbb{F}] = n$?.
Primero analicemos la extensión

$$L\mathbb{Q} \hookrightarrow L\mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

inducida por $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
Dado $f \in L\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ este elemento es una función de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Como $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$ entonces existen $f_1, f_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tal que

$$f = f_1 + \sqrt{2} f_2$$

Como f posee soporte izquierdo finito entonces, para $j = 1, 2$, cada f_j posee soporte izquierdo finito, es decir, $f_j \in L\mathbb{Q}$. De esta manera tenemos que $[L\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : L\mathbb{Q}] = 2$.
Ahora ocupemos el mismo argumento de espacios vectoriales de antes para el caso general.
Dado $f \in L\mathbb{E}$ existen $f_1, ..., f_n \in L\mathbb{F}$ tal que

$$f = (f_1, ..., f_n) = f_1 u_1 + ... + f_n u_n$$

donde u_j son los elementos de la base de la extensión $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{E}$.
Además como f posee soporte izquierdo finito entonces también lo tienen f_j, $j = 1, \ldots, n$ ya que

$$supp(f_j) \subset supp(f)$$

Con lo que $f_j \in L\mathbb{F}$ y $L\mathbb{F}$ es un $L\mathbb{E}$ espacio vectorial finito de dimensión a lo más n. Pero como los u_j son los elementos de la base de la extensión se tiene que $[L\mathbb{F} : L\mathbb{E}] = n$. De esta manera mi pregunta original da lugar al siguiente

Teorema 4.1. *Dada la torre de extensiones* $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{E} \hookrightarrow \mathbb{C}$. *Si* $[\mathbb{E} : \mathbb{F}] = n$, *entonces* $[L\mathbb{E} : L\mathbb{F}] = n$.

Dejamos la siguiente pregunta abierta. Si consideramos la torre de dimensión finita $L\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{F}$ entonces ¿existirá un subcuerpo, $E \leq \mathbb{C}$ tal que $\mathbb{F} = LE$?

4.2. Anexo 2. Motivación de la Tesis, el Problema de los Ángulos.

En los años 50, Paul Erdös planteó la conjetura que todo conjunto en $\mathbb{R}^n$ de más de 2^n puntos, posee al menos un ángulo obtuso. Este problema fue planteado como "prize question" por la Sociedad Matemática Holandesa. Durante muchos años estuvo sin resolverse, solo se obtuvieron soluciones para $n = 2$ y $n = 3$.
En 1962 Ludwig Danzer y Branko Grünbaum resuelven el problema con una cadena de 6 desigualdades empezando y terminando con 2^n. Esta solución se puede encontrar en la referencia [1].
A modo de resumen enunciaremos las seis desigualdades (sin demostración). Primero, algunas definiciones.

Definición 4.2. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ definimos el ángulo de a,b,c ($\angle(a, b, c)$) como sigue:

$$\angle(a, b, c) = \frac{< a - b, c - b >}{\|a - b\| \|c - b\|}$$

Decimos que el ángulo es angudo si $\angle(a, b, c) > 0$.
Recto si $\angle(a, b, c) = 0$.
Obtuso si $\angle(a, b, c) < 0$.

Definición 4.3. Sea $x_0, n \in \mathbb{R}^n$ se define el hiperplano centrado en x_0 y normal n como $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \ < x - x_0, n >= 0\}$. Decimos que dos hiperplanos son paralelos si poseen la misma normal (salvo traslaciones y constantes).

Observación 4.1. *Se puede notar que el hiperplano H de la definicion anterior separa el plano en 3 subespacios:*

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \ < x - x_0, n > \ > 0\}$$
$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \ < x - x_0, n >= 0\}$$
$$H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : \ < x - x_0, n > \ < 0\}$$

Definición 4.4. Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$ consideramos los hiperplanos $H_a = \{x \in \mathbb{R}^n : \ < x - a, b - a >= 0\}$ y $H_b = \{x \in \mathbb{R}^n : \ < x - b, b - a >= 0\}$. Estos dos hiperplanos separan el espacio en 5 subespacios. Definimos la franja S(a,b) como el espacio entre estos hiperplanos o equivalentemente $S(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ < x - a, b - a > \ > 0 \quad \text{y} \quad < x - b, b - a > \ > 0\}$.

Definición 4.5. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ definimos la cápsula convexa de S (conv(S) como

$$conv(S) = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad x = \sum_{i \in I} \lambda_i s_{\cdot i} \quad \text{donde} \sum_{i \in I} \lambda_i = 1 \quad , \sharp I < \infty\} \quad \text{y } s_i \in S$$

Definición 4.6. Un conjunto $P \subset \mathbb{R}^n$ se dice un polítopo si es union finita de cápsulas convexas.
Un polítopo P se dice centralmente simétrico si existe $x_o \in P$ tal que

$$x_0 + x \in P \Leftrightarrow x_0 - x \in P$$

El punto x_0 se llama el centro de P.

Ahora podemos enunciar la cadena de desigualdades de Danzer y Grünbaum.

Teorema 4.2.
$2^n \leq máx\{\sharp S : S \subset \mathbb{R}^n, \angle(s_i, s_j, s_k) \leq \frac{\pi}{2} \quad \textit{para todo} \quad \{s_i, s_j, s_k\} \subset S\}.$

$\leq máx\{\sharp S : S \subset \mathbb{R}^n,$ *tal que para cada par de puntos* $\{s_i, s_j\} \subset S,$ *existe una franja* $S(s_i, s_j)$ *que contiene a* $S\}.$

$\leq máx\{\sharp S : S \subset \mathbb{R}^n,$ *tal que las traslaciones* $P - s_i, s_i \in S$ *de una cápsula convexa* $P := conv(S)$*se intersectan en un punto en común, pero ellas sólo se tocan.* $\}.$

$\leq máx\{\sharp S : S \subset \mathbb{R}^n,$ *tal que las traslaciones* $Q + s_i$ *de un polítopo convexo* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *se tocan dos a dos*$\}.$

$\leq máx\{\sharp S : S \subset \mathbb{R}^n,$ *tal que las traslaciones* $Q^* + s_i$*de un polítopo convexo centralmente simétrico* $Q^* \subset \mathbb{R}^n$ *se tocan dos a dos*$\}.$

$\leq 2^n$

Las demostraciones de estas desigualdades lidian con conceptos muy simples como traslación de polítopos, cápsulas convexas, franjas, polítopos centralmente simétricos, volumen y el concepto de tocarse.

Una pregunta interesante es saber si la demostración de Danzer y Grünbaum es aplicable en otro cuerpo ordenado. Para ello fijemos las ideas con algunas definiciones.
Para el concepto de tocarse, es natural pensar dos conjuntos solo se tocan si su intersección es solo un punto(figura 1), pero esta definición resulta insuficiente pues si pensamos en dos cuadrados en el plano cuya intersección es un lado su interseccion es despreciable en el plano.

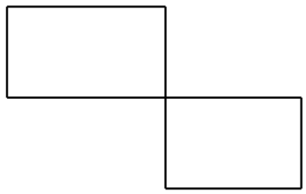

figura 1

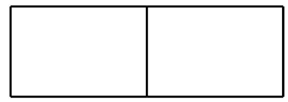

figura 2

Nos gustaría decir que estos conjuntos solo se tocan en $\mathbb{R}^2$ (figura 2), puesto que su intersección tiene área 0.Teniendo esto en cuenta, podemos definir en forma general el concepto tocarse en $\mathbb{R}^n$ como sigue:
Dos conjuntos A y B de $\mathbb{R}^n$, con volumen, solo se tocan si $vol(A \cap B) = 0$.
Para eso ocupamos una función *volumen*, con dominio en los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y rango en $\mathbb{R}$ tal que:
Dados A y B en el dominio de la función, $a \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$vol(A \cup B) + vol(A \cap B) = vol(A) + vol(B)$$

$$vol(A) = vol(A + c)$$

$$vol(\lambda A) = \lambda^n vol(A).$$

Los polítopos son conjuntos con volumen, es decir el volumen es, en un sentido, una medida de Lebesgue o un contenido de Jordan.

Para el caso general de un cuerpo ordenado $\mathbb{F}$ necesitamos una función tal que $Vol : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ y cumpla las ecuaciones anteriores.
Notemos que el rango de Vol debe estar contenido en $\mathbb{F}$ y no en $\mathbb{R}$ pues es natural que si tomamos un intervalo I (más generalmente un rectángulo), entonces $vol(I(a, b)) = b - a \in \mathbb{F}$, es decir, queremos que el volumen mida en el cuerpo $\mathbb{F}$.

La presente tesis consiguió demostrar la existencia de un volumen, que toma conjuntos medibles de $\mathcal{R}^n$ y los lleva a $\mathcal{R}$. Para finalizar la generalización del problema de Erdos sólo faltaría verificar que los polítopos son efectivamente conjuntos medibles.
Cabe destacar que la introducción de esta medida es generalizable a cualquier cuerpo ordenado con un orden minimalmente arquimediano (ver definición Cap. 2). Es decir, el problema de Erdös se puede generalizar a cualquier cuerpo minimalmente arquimediano (previa verificación, caso a caso, de la medibilidad de los polítopos).

Referencias

[1] Aigner, M. and Ziegler, G. M. Proofs from The Book, Third edition. Springer-Verlag, Berlin, (2004).

[2] Berz, M. Analysis on a Nonarchimedean Extension of the Real Numbers. Lecture Notes, Studienstiftung Summer School Budapest, (September, 1992).

[3] Jacobson, N. Basic algebra I. Second edition. W. H. Freeman and Company, New York. (1985).

[4] Kitchen, J.W. Jr. Calculus on one variable. Addison-Wesley Pub. Co. (1968).

[5] Prestel, A. Lectures on Formally Real Fields, Springer, (1984).

[6] Shamseddine, K. and Berz, M. Measure theory and integration on the Levi-Civita field. Ultrametric functional analysis. Contemp. Math. Vol 319, 369-387, (2003)

[7] Shamseddine, K. and Berz, M. Analysis on the Levi-Civita field, a brief overview, Advances in p-adic and non-Archimedean analysis. Contemp. Math. Vol 508, 215-237, (2010)

[8] Troncoso, S. A multitude of orders in $\mathbb{F}_\infty$ Proceedings of the Second Mathematical Meeting in Memory of Herbert Gross (1936-1989),Note di Matematica e Fisica Anno 22, Vol 13, Ed. CERFIM Locarno, 47-50, (2009)